# Algoritmica grafurilor

Conf. dr. habil. Eduard Rotenstein

Suport de curs, 2026

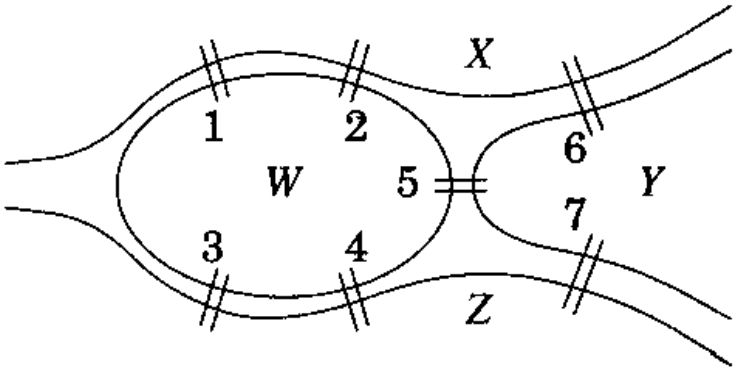
## 1 Ce este un graf?

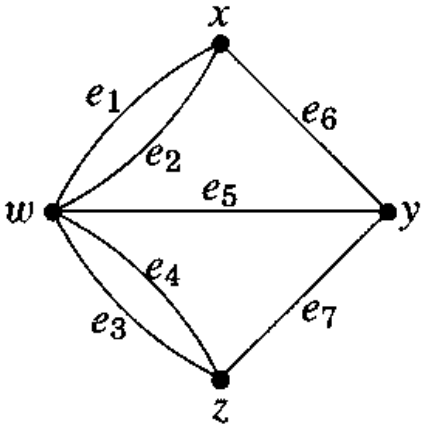
Multe întrebări practice au aceeaşi structură ascunsă: avem o mulţime de obiecte şi ne interesează care perechi dintre ele sunt "legate". De exemplu: cum conectăm cu cost minim un număr de localităţi printr-o reţea de fibră optică? Care este cel mai scurt traseu între două intersecţii dintr-un oraş? Câte intervale orare sunt necesare pentru a programa examenele unei sesiuni, astfel încât niciun student să nu aibă două examene simultan? Se pot colora ţările oricărei hărţi cu patru culori, astfel încât ţările vecine să primească culori diferite? Toate aceste probleme se formulează natural în limbajul teoriei grafurilor, pe care îl introducem în acest curs.

Se spune adesea că teoria grafurilor s-a născut în 1736, odată cu rezolvarea de către Euler a problemei următoare.

**Exemplul 1.1** *Oraşul Königsberg era traversat de râul Pregel, care delimita patru zone de uscat: două maluri şi două insule. Aceste zone erau legate prin şapte poduri. Întrebarea era dacă un locuitor poate pleca de acasă, poate traversa fiecare pod exact o singură dată şi se poate întoarce acasă.*

*Reprezentăm fiecare zonă de uscat printr-un punct şi fiecare pod printr-o curbă care uneşte zonele pe care le leagă. Notăm cu $X$ şi $Z$ cele două maluri, cu $W$ insula mare şi cu $Y$ insula mică:*




*Ori de câte ori un traseu trece printr-o zonă, el foloseşte două poduri: unul de intrare şi unul de ieşire. La fel, primul şi ultimul pod ale unui traseu închis formează o pereche în zona de plecare. Prin urmare, un astfel de traseu poate exista doar dacă fiecare zonă este capătul unui număr par de poduri. În Königsberg, zona $W$ este capătul a $5$ poduri, iar $X$, $Z$, $Y$ sunt capetele a câte $3$ poduri, deci traseul dorit nu există.*

Problema anterioară reţine exact informaţia relevantă: o mulţime de puncte, o mulţime de legături şi, pentru fiecare legătură, cele două puncte pe care le uneşte. Aceasta conduce la definiţia generală a conceptului de graf.

**Definiţia 1** *Un **graf** $G$ este un triplet format dintr-o mulţime de **vârfuri** (vertex, en.) $V(G)$, o mulţime de **muchii** (edges, en.) $E(G)$ şi o relaţie care asociază fiecărei muchii două vârfuri (nu neapărat distincte), numite **extremităţile** (endpoints, en.) ei.*

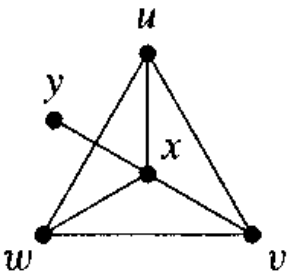
Un graf se **desenează** reprezentând fiecare vârf printr-un punct din plan şi fiecare muchie printr-o curbă care uneşte punctele corespunzătoare extremităţilor sale. Acelaşi graf admite, desigur, multe reprezentări grafice diferite.

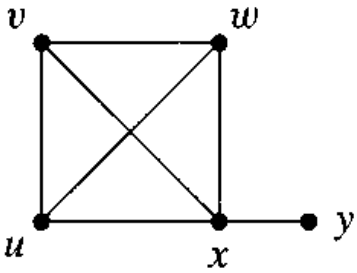
**Definiţia 2** *O **buclă** (loop. en.) este o muchie ale cărei extremităţi coincid. **Muchiile multiple** sunt muchii care au aceeaşi pereche de extremităţi. Un graf fără bucle şi fără muchii multiple se numeşte **graf simplu**.*

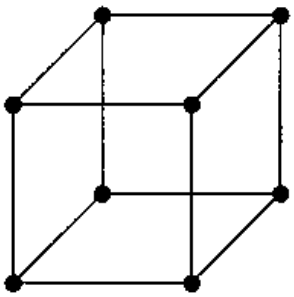
*Când $u$ şi $v$ sunt extremităţile unei muchii, spunem că $u$ şi $v$ sunt **adiacente** (sau **vecine**) şi scriem $u \leftrightarrow v$.*

Într-un graf simplu, o muchie este complet determinată de extremităţile sale. Putem astfel identifica muchia cu perechea *neordonată* $\{u, v\}$, pe care o notăm, prescurtat, $uv$ (sau, echivalent, $vu$). Un graf simplu este deci dat de o mulţime de vârfuri $V$ şi de o mulţime $E$ de submulţimi cu două elemente ale lui $V$. Graful din Exemplul 1.1 nu este simplu: are muchii multiple (între $x$ şi $w$, respectiv între $z$ şi $w$). În cele ce urmează vom lucra, aproape exclusiv, cu grafuri simple.

**Exemplul 1.2** *Fie $V = \{x, y, u, v, w\}$ şi $E = \{xy, xu, xv, xw, uv, vw, uw\}$. Mai jos sunt două desene ale acestui graf simplu; al doilea arată că muchiile se pot desena fără intersecţii.*



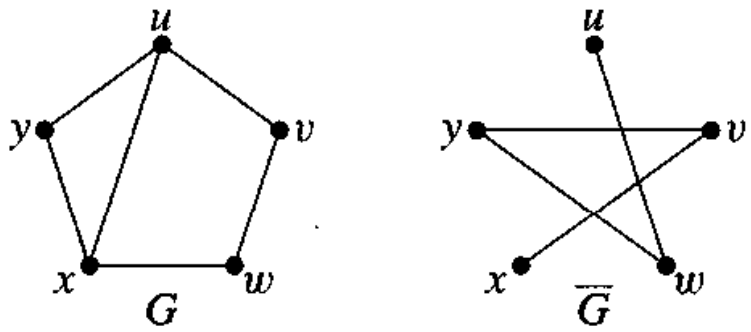
**Definiţia 3** *$(a)$ Un graf este **finit** dacă mulţimile sale de vârfuri şi de muchii sunt finite.*

*$(b)$ **Graful nul** este graful cu $V = E = \emptyset$. Includerea lui în enunţuri generale produce doar complicaţii inutile, aşa că îl excludem: toate grafurile considerate au cel puţin un vârf.*

# 2 Modelare prin grafuri

Aplicaţii variate sugerează noţiuni structurale naturale ce se pot modela prin intermediul unor grafuri construite în mod convenabil.

**Exemplul 2.1 (Relaţii de cunoştinţe şi subgrafurile)** *Orice mulţime de şase persoane conţine trei cunoştinţe comune şi trei persoane străine comune? Cum relaţie de "cunoştinţă" este simetrică, modelăm problema printr-un graf simplu, în care persoanele sunt reprezentate prin vârfuri, iar relaţia de cunoştinţă printr-o muchie între cele două persoane. Similar, prin complementaritate, putem construi graful ce caracterizează absenţa relaţiilor dintre persoane.*




**Definiţia 4** ***Complementul*** *unui graf simplu $G$ este graful simplu $\overline{G}$ cu $V(\overline{G}) = V(G)$, în care $uv \in E(\overline{G})$ dacă şi numai dacă $uv \notin E(G)$ (pentru $u \neq v$).*

**Definiţia 5** *O **clică** (clique, en.) într-un graf este o mulţime de vârfuri două câte două adiacente. O **mulţime independentă** (sau **stabilă**) într-un graf este o mulţime de vârfuri două câte două neadiacente.*

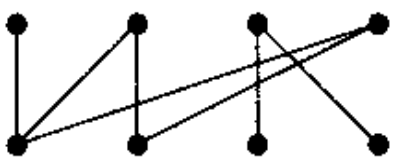
În Exemplul 2.1, $\{u, x, y\}$ este o clică de dimensiune $3$, iar $\{u, w\}$ este o mulţime independentă, de dimensiune $2$, ele fiind cele mai mari astfel de mulţimi. Aceste valori se inversează în $\overline{G}$. Se poate formula în trebarea: orice graf cu $6$ vârfuri conţine o clică de dimensiune $3$ sau o mulţime independentă de dimensiune $2$?

**Propoziţia 2.1** *Orice graf simplu cu cel puţin $6$ vârfuri conţine o clică cu $3$ vârfuri sau o mulţime independentă cu $3$ vârfuri.*

*Demonstraţie.* Este suficient să tratăm cazul a $6$ vârfuri. Fixăm un vârf $x$. Dintre celelalte $5$ vârfuri, fie cel puţin $3$ sunt vecini ai lui $x$, fie cel puţin $3$ nu sunt. Prin trecere la complement (care interschimbă clicile şi mulţimile independente) putem presupune primul caz: $x$ are vecinii $a, b, c$. Dacă două dintre vârfurile $a, b, c$ sunt adiacente, ele formează împreună cu $x$ o clică cu $3$ vârfuri; altfel $\{a, b, c\}$ este o mulţime independentă.

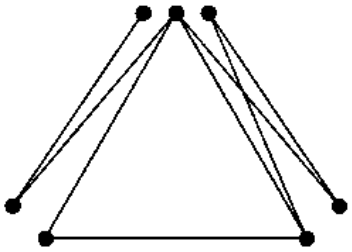
Într-un grup de $5$ persoane se poate întâmpla să nu existe nici trei cunoştinţe reciproce, nici trei necunoscuţi reciproci. Pentru $6$ persoane, situaţia se schimbă.

**Exemplul 2.2 (Repartizarea sarcinilor)** *Avem $m$ posturi şi $n$ candidaţi, fiecare candidat fiind calificat doar pentru unele posturi. Construim un graf simplu cu un vârf pentru fiecare post (rândul de jos) şi un vârf pentru fiecare candidat (rândul de sus), unind postul $j$ cu candidatul $p$ dacă $p$ poate ocupa postul $j$. Fiecare post trebuie ocupat de către exact un candidat, iar fiecare candidat ocupă cel mult un post; căutăm deci $m$ muchii, două câte două disjuncte. În acest graf nu există muchii între două posturi sau între doi candidaţi: vârfurile se împart în două mulţimi independente.*



**Definiţia 6** *Un graf $G$ este **bipartit** dacă $V(G)$ este reuniunea a două mulţimi independente disjuncte (eventual vide), numite **clasele de (bi)partiţie** ale lui $G$.*

**Exemplul 2.3 (Programarea examenelor şi probleme de colorare)** *Presupunem că, într-o sesiune trebuie programate mai multe examene. Două examene nu pot avea loc în acelaşi interval orar dacă există un student înscris la amândouă. Reprezentăm fiecare examen printr-un vârf şi unim două vârfuri dacă examenele respective au un student comun. Atribuim fiecărui vârf o etichetă (intervalul orar), astfel încât extremităţile oricărei muchii să primească etichete diferite; dorim cât mai puţine etichete. Vârfurile care primesc aceeaşi etichetă formează o mulţime independentă, iar vârfurile unei clici primesc etichete distincte două câte două. De exemplu, în graful de mai jos triunghiul arată că sunt necesare cel puţin trei intervale, iar partiţia în mulţimi independente arată că trei intervale sunt suficiente.*



*Deoarece etichetele nu au valoare numerică, ci doar separă vârfurile în clase, le numim **culori**.*

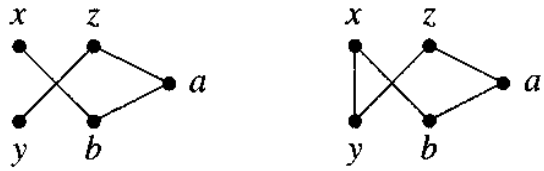
**Definiţia 7** ***Numărul cromatic** al unui graf $G$, notat $\chi(G)$, este numărul minim de culori cu care se pot colora vârfurile lui $G$ astfel încât vârfurile adiacente să aibă culori diferite. Graful $G$ este $k$**-partit** dacă $V(G)$ se poate scrie ca reuniune a $k$ mulţimi independente (eventual vide).*

Grafurile bipartite sunt exact grafurile $2$-partite. Clasele de culoare ale unei colorări sunt mulţimi independente, deci $\chi(G)$ este numărul minim de mulţimi independente în care se poate partiţiona $V(G)$, iar $G$ este $k$-partit dacă şi numai dacă $\chi(G) \leq k$. Dacă $G$ conţine o clică cu $r$ vârfuri, atunci $\chi(G) \geq r$.

**Exemplul 2.4 (Hărţi şi probleme de colorare)** *Informal, o **hartă** este o împărţire a planului în regiuni conexe. Asociem fiecărei regiuni un vârf şi unim două vârfuri dacă regiunile corespunzătoare au o frontieră comună (nu doar un punct). Întrebarea dacă orice hartă se poate colora cu patru culori devine: are graful obţinut număr cromatic cel mult $4$? Grafurile care rezultă astfel pot fi desenate în plan fără ca muchiile să se intersecteze. Astfel de grafuri se numesc **planare**. Faptul că un anumit desen are intersecţii nu arată că graful nu este planar: poate exista alt desen fără intersecţii (vezi Exemplul 2.3). Răspunsul afirmativ la întrebarea de mai sus este celebra* Teoremă a celor patru culori.

**Exemplul 2.5 (Trasee în reţelele stradale)** *O reţea rutieră se modelează printr-un graf ale cărui vârfuri sunt intersecţiile şi ale cărui muchii sunt tronsoanele de drum dintre ele. Muchiilor li se pot asocia ponderi (lungimi sau durate, sau sensuri). Ne interesează, de exemplu, cel mai scurt traseu între două vârfuri date, sau un traseu care vizitează fiecare vârf exact o dată. Avem nevoie de terminologie pentru astfel de trasee.*

**Definiţia 8** *Un **drum** (lanţ elementar) este un graf simplu ale cărui vârfuri pot fi ordonate astfel încât două vârfuri sunt adiacente dacă şi numai dacă sunt consecutive în această ordine. Un **ciclu** este un graf cu acelaşi număr de vârfuri şi de muchii ale cărui vârfuri pot fi aşezate pe un cerc astfel încât două vârfuri sunt adiacente dacă şi numai dacă sunt consecutive pe cerc.*




Putem observa în graful de mai sus un drum şi un ciclu, aranjând vârfurile în ordinea $x, b, a, z, y$. Eliminarea unei muchii dintr-un ciclu va genera un drum. Pentru studierea problemei traficului rutier, ne referim la drumurile şi ciclurile conţinute în acel graf. De asemenea, este de aşteptat ca fiecare vârf să poată fi accesibil din oricare altul. Definiţia următoare formalizează precis acest concept.

**Definiţia 9** $(a)$ *Un **subgraf** al grafului $G$ este un graf $H$ cu $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, în care fiecare muchie din $H$ are aceleaşi extremităţi ca în $G$. Scriem $H \subseteq G$ şi spunem că $G$ **conţine** pe $H$.*

$(b)$ *Graful $G$ este **conex** dacă oricare două vârfuri ale sale aparţin unui drum care este subgraf al lui $G$. În caz contrar, $G$ este **neconex**.*

# 3 Matrice asociate şi izomorfism

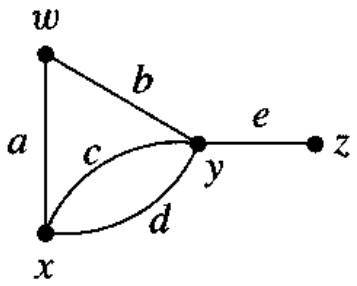
Un graf poate fi dat prin lista vârfurilor şi a muchiilor, dar există şi reprezentări matriceale utile. Un graf este **fără bucle** dacă nu are cicluri (muchiile multiple sunt permise).

**Definiţia 10** *Fie $G$ un graf fără bucle, cu mulţimea vârfurilor $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ şi cea a muchiilor $E(G) = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Atunci:*

- ***Matricea de adiacenţă** a lui $G$, notată cu $A(G)$ este matricea $n \times n$, cu elementul $a_{ij}$ egal cu numărul de muchii cu extremităţile $v_i$ şi $v_j$.*
- ***Matricea de incidenţă** a lui $G$, notată cu $M(G)$ este matricea $n \times m$ cu $m_{ij} = 1$ dacă $v_i$ este extremitate a lui $e_j$ şi $m_{ij} = 0$ în caz contrar.*
- *Dacă $v$ este extremitate a muchiei $e$, spunem că $v$ şi $e$ sunt **incidente**. **Gradul** unui vârf $v$ (într-un graf fără bucle) este numărul muchiilor incidente cu $v$. Gradul lui $v$ în $G$ se va nota cu $d_G(v)$, sau, dacă nu există risc de confuzie, $d(v)$.*

**Observaţia 3.1** *Matricea de adiacenţă depinde de ordonarea aleasă a vârfurilor. Ea este întotdeauna simetrică ($a_{ij} = a_{ji}$). Pentru un graf simplu, elementele ei sunt $0$ sau $1$, cu zerouri pe diagonală. Gradul lui $v_i$ este suma elementelor de pe linia $i$, atât în $A(G)$, cât şi în $M(G)$.*

**Exemplul 3.1** *Graful $G$ de mai jos are vârfurile $w, x, y, z$ şi muchiile $a = wx, b = wy, c = xy, d = xy, e = yz$.*



*Matricile asociate sunt*

$$A(G) = \begin{array}{c} \\ w \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w & x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \textit{şi} \qquad M(G) = \begin{array}{c} \\ w \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Cunoaşterea matricei de adiacenţă pentru un graf atribuie implicit nume vârfurilor prin ordinea rândurilor; al $i$-lea vârf corespunde celui de-al $i$-lea rând şi celei de-a $i$-a coloane. Stocarea unui graf necesită denumirea vârfurilor. Cu toate acestea, dorim să studiem proprietăţi (cum ar fi conexitatea), care nu depind de aceste denumiri. Intuitiv, proprietăţile structurale ale grafurilor $G$ şi $H$ vor fi aceleaşi dacă putem redenumi vârfurile lui $G$ folosind vârfurile lui $H$, astfel încât $G$ să devină efectiv $H$. Definim această noţiune în mod riguros pentru grafurile simple. Redenumirea este realizată printr-o funcţie de la $V(G)$ la $V(H)$, care asociază fiecărui element din $V(G)$ un element unic din $V(H)$, punând astfel în corespondenţă vârfurile celor două grafuri. A spune că această redenumire transformă graful $G$ în $H$ înseamnă că bijecţia dintre mulţimile de vârfuri păstrează relaţia de adiacenţă dintre vârfuri.

**Definiţia 11** *Un **izomorfism** de la graful simplu $G$ la graful simplu $H$ este o bijecţie $f\colon V(G) \to V(H)$ astfel încât*

$$uv \in E(G) \quad \iff \quad f(u)f(v) \in E(H), \quad \textit{pentru orice } u, v \in V(G).$$

*Spunem că $G$ este **izomorf cu** $H$ şi scriem $G \cong H$ dacă există un izomorfism de la $G$ la $H$.*

**Exemplul 3.2** *Fie $G$ graful cu $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$, $E(G) = \{12, 23, 34, 41\}$, şi $H$ graful cu $V(H) = \{a, b, c, d\}$, $E(H) = \{ac, cb, bd, da\}$. Deşi desenele arată diferit, funcţia $f(1) = a$, $f(2) = c$, $f(3) = b$, $f(4) = d$ este un izomorfism: ea transformă muchiile $12, 23, 34, 41$ în $ac, cb, bd, da$, adică exact în muchiile lui $H$, deci păstrează şi nonadiacenţele. Echivalent, matricea de adiacenţă a lui $G$ în ordinea $1, 2, 3, 4$ coincide cu matricea de adiacenţă a lui $H$ în ordinea $a, c, b, d$:*

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A(H)\big|_{\textit{ordinea } a,c,b,d}.$$

*Ambele grafuri sunt cicluri cu patru vârfuri.*

**Observaţia 3.2 (Găsirea izomorfismelor)** *Reordonarea vârfurilor unui graf revine la aplicarea aceleiaşi permutări liniilor şi coloanelor matricei de adiacenţă: dacă $P$ este matricea de permutare corespunzătoare, noua matrice este $PA(G)P^T$. În consecinţă, $G \cong H$ dacă şi numai dacă există o matrice de permutare $P$ cu*

$$PA(G)P^T = A(H).$$

*Un izomorfism păstrează, în particular, gradele: $d_H(f(v)) = d_G(v)$ pentru orice $v$. Aceasta restrânge mult posibilele imagini ale fiecărui vârf.*

**Observaţia 3.3 (Grafuri care nu sunt simple)** *Pentru grafuri cu bucle sau muchii multiple, un izomorfism de la $G$ la $H$ este o pereche de bijecţii $V(G) \to V(H)$ şi $E(G) \to E(H)$ astfel încât fiecare muchie cu extremităţile $u, v$ este dusă într-o muchie cu extremităţile $f(u), f(v)$. Nu vom utiliza, deocamdată, această situaţie.*

Adjectivul "izomorf" se referă întotdeauna la o *pereche* de grafuri. Deoarece relaţia este simetrică, putem spune "$G$ şi $H$ sunt izomorfe". Reamintim că o **relaţie de echivalenţă** pe o mulţime este o relaţie reflexivă, simetrică şi tranzitivă. Relaţia de adiacenţă pe vârfurile unui graf este simetrică, dar nu este reflexivă şi, în general, nu este tranzitivă.

**Propoziţia 3.1** *Relaţia de izomorfism este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea grafurilor simple.*

*Demonstraţie.*

Reflexivitate. Aplicaţia identică $\mathrm{id}_{V(G)}$ este, evident, un izomorfism de la $G$ la $G$.

Simetrie. Fie $f\colon V(G) \to V(H)$ un izomorfism şi $g = f^{-1}$. Pentru $x, y \in V(H)$, considerăm $u = g(x)$, $v = g(y)$. Atunci, $f(u) = x$, $f(v) = y$ şi

$$xy \in E(H) \iff f(u)f(v) \in E(H) \iff uv \in E(G) \iff g(x)g(y) \in E(G),$$

deci $g$ este un izomorfism de la $H$ la $G$.

Tranzitivitate. Fie $f\colon V(F) \to V(G)$ şi $g\colon V(G) \to V(H)$ două izomorfisme. Atunci $g \circ f$ este bijecţie şi, pentru $u, v \in V(F)$,

$$uv \in E(F) \iff f(u)f(v) \in E(G) \iff g(f(u))\, g(f(v)) \in E(H),$$

deci $g \circ f$ este un izomorfism de la $F$ la $H$.

O relaţie de echivalenţă împarte mulţimea pe care este definită în **clase de echivalenţă**: două elemente sunt în relaţie dacă şi numai dacă aparţin aceleiaşi clase. Avem astfel:

**Definiţia 12** *O **clasă de izomorfism** este o clasă de echivalenţă a grafurilor în raport cu relaţia de izomorfism.*

**Observaţia 3.4 (Grafuri neetichetate)** *Concluziile structurale despre un graf $G$ sunt valabile pentru orice graf izomorf cu $G$. Ele nu depind de numele vârfurilor. Din acest motiv, prin graf neetichetat înţelegem, informal, o clasă de izomorfism. Un desen fără nume pe vârfuri este un reprezentant al unei astfel de clase, iar când redesenăm un graf pentru a evidenţia o proprietate, alegem pur şi simplu alt reprezentant.*

**Definiţia 13** $(a)$ *Notăm cu $P_n$ şi $C_n$ drumul, respectiv ciclul (neetichetat) cu $n$ vârfuri. Un **$n$-ciclu** este un ciclu cu $n$ vârfuri. Un **graf complet** este un graf simplu în care oricare două vârfuri sunt adiacente. Graful complet cu $n$ vârfuri se notează $K_n$.*

$(b)$ *Un **graf bipartit complet** (sau **biclică**) este un graf simplu bipartit în care două vârfuri sunt adiacente dacă şi numai dacă se află în clase de bipartiţie diferite. Dacă clasele au $r$ şi, respectiv, $s$ elemente, notăm graful cu $K_{r,s}$.*



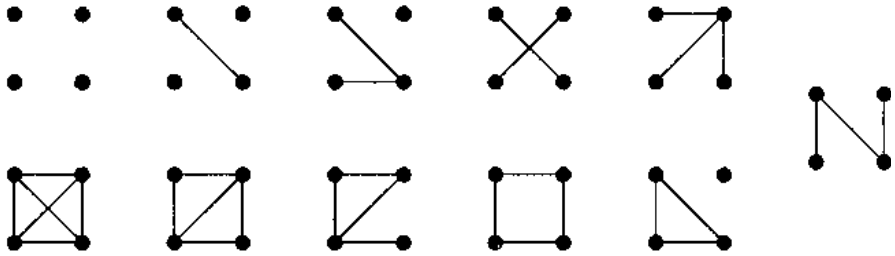

**Observaţia 3.5** $(1)$ *Distingem între un graf complet (un graf) şi o clică (o mulţime de vârfuri dintr-un graf). Astfel, putem vorbi despre clici în acelaşi limbaj ca şi despre mulţimi independente. Denumirea "biclică" aminteşte că $K_{r,s}$ nu este, în general, un graf complet, chiar dacă este un graf bipartit complet.*

$(2)$ *Când spunem că "$G$ conţine $H$" pentru un graf neetichetat $H$, înţelegem că $G$ are un subgraf izomorf cu $H$ (o copie a lui $H$). De exemplu, $K_4$ conţine $4$ copii ale lui $C_3$, iar $K_{2,4}$ nu conţine nicio copie a lui $C_3$ (orice ciclu dintr-un graf bipartit alternează între clase, deci are lungime pară).*

Proprietăţile structurale sunt determinate de relaţia de adiacenţă, deci sunt păstrate de izomorfisme. Le vom numi, în cele ce urmează, **invarianţi**. Pentru a arăta că $G$ nu e izomorf cu $H$ este suficient să găsim un invariant care diferă: numărul de vârfuri sau de muchii, şirul gradelor, existenţa unui anumit subgraf, conexitatea, bipartiţia, complementul etc. În schimb, coincidenţa câtorva invarianţi nu dovedeşte că $G \cong H$. Pentru aceasta trebuie identificat un izomorfism între cele două grafuri.

**Exemplul 3.3 (Numărul grafurilor cu $n$ vârfuri)** *Numărul de moduri de a alege $k$ elemente dintr-o mulţime cu $n$ elemente este coeficientul binomial $C_n^k$ . În particular, există $C_n^2$ perechi de vârfuri. Un graf simplu cu mulţimea de vârfuri $X$, cu $|X| = n$, se obţine decizând pentru fiecare pereche dacă este sau nu muchie. Prin urmare există exact $2^{C_n^2}$ grafuri simple, cu mulţimea de vârfuri $X$.*

*Pentru $n = 3$ obţinem $8$ grafuri, dar doar $4$ clase de izomorfism: un graf cu $3$ vârfuri este determinat până la izomorfism de numărul său de muchii ($0$, $1$, $2$ sau $3$). Clasele au $1$, $3$, $3$, respectiv $1$ elemente, deci nu putem obţine numărul claselor împărţind $2^{C_n^2}$ la o constantă. Pentru $n = 4$ există $64$ de grafuri şi $11$ clase de izomorfism.*



*Totuşi, o clasă de izomorfism conţine cel mult $n!$ grafuri pe $X$ (câte unul pentru fiecare bijecţie $X \to X$ aplicată unui reprezentant). Rezultă că numărul claselor de izomorfism este cel puţin*

$$\frac{2^{C_n^2}}{n!}.$$

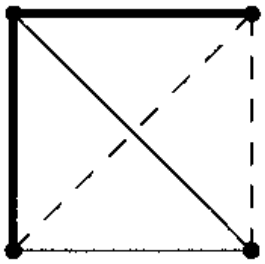
# 4 Descompuneri şi grafuri speciale

Faptul că $P_4 \cong \bar{P}_4$ sugerează introducerea unei familii speciale de grafuri şi probleme asociate.

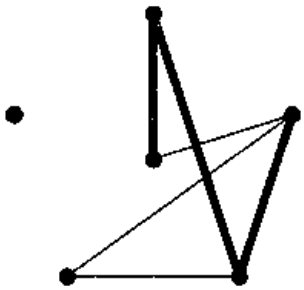
**Definiţia 14** *Un graf este **autocomplementar** dacă este izomorf cu complementul său. O **descompunere** a unui graf este o listă de subgrafuri ale sale astfel încât fiecare muchie a grafului apare în exact unul dintre ele.*

Orice graf simplu $H$ cu $n$ vârfuri şi complementul său formează o descompunere a lui $K_n$. Deci $H$ este autocomplementar dacă şi numai dacă $K_n$ admite o descompunere în două copii ale lui $H$.

**Exemplul 4.1** *Putem descompune pe $K_5$ în două $5-$cicluri, deci un $5-$ciclu este auto-complementar. Orice graf cu $n$ vârfuri şi complementarul său îl descompun pe $K_n$. De asemenea, $K_{1,n-1}$ şi $K_{n-1}$ reprezintă o descomunere a lui $K_n$, chiar daca unul dintre aceste subgrafuri omite un vârf. Mai jos avem o descompunere a lui $K_4$ folosind trei copii ale lui $P_3$.*



**Problem 4.1** *O problemă fundamentală din teoria design-ului combinatorial este dată de determinarea grafurilor complete ce admit descompuneri în copii ale lui $K_3$. În graficul de mai jos, în stânga avem o posibilă descompunere a lui $K_7$. Rotind triunghiul îngroşat prin cele 7 poziţii, folosim fiecare muchie o singură dată.*



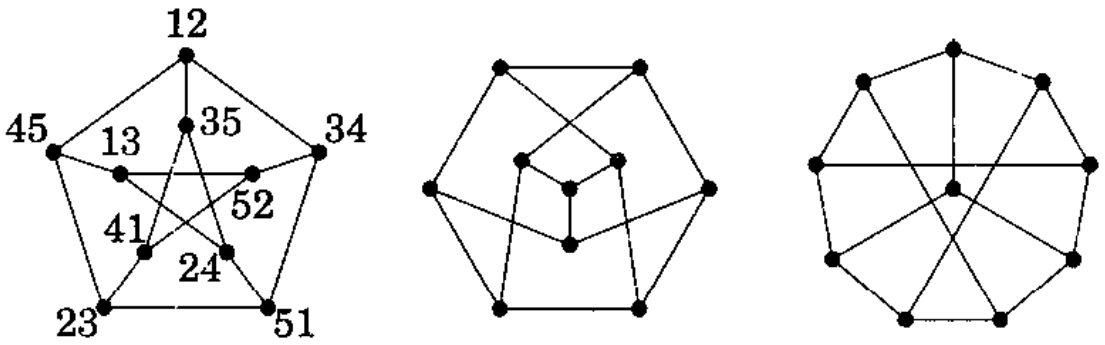
*Pentru situaţia lui $K_7$, luăm $V(K_7) = \mathbb{Z}_7 = \{0, 1, \ldots, 6\}$ şi triunghiurile*

$$T_i = \{i,\ i+1,\ i+3\} \pmod 7, \qquad i = 0, 1, \ldots, 6.$$

*Diferenţele dintre elementele lui $\{0, 1, 3\}$ sunt $1, 2, 3$ (şi opusele lor $6, 5, 4$), fiecare apărând o singură dată. O muchie $\{x, y\}$ a lui $K_7$ are "diferenţa" $\pm(y - x) \in \{\pm1, \pm2, \pm3\}$, iar pentru fiecare diferenţă există exact o translaţie $T_i$ care conţine muchia. Deci cele 7 triunghiuri folosesc fiecare dintre cele 21 de muchii exact o dată. Întrebarea "pentru ce valori ale lui $n$ se descompune $K_n$ în triunghiuri" este un punct de plecare al teoriei designurilor combinatoriale.*

## 4.1 Graful lui Petersen

**Definiţia 15** ***Graful lui Petersen*** *este graful simplu ale cărui vârfuri sunt submulţimile cu două elemente ale unei mulţimi cu cinci elemente şi în care două vârfuri sunt adiacente dacă şi numai dacă submulţimile corespunzătoare sunt disjuncte. Îl putem desena în următoarele moduri:*



*Este un exemplu de graf deosebit de important, fiind studiat într-o carte întreagă dedicată lui, Holton-Sheellan [3]*

**Problem 4.2 (Structura grafului lui Petersen)** *Graful are $C_5^2 = 10$ vârfuri. Pentru o pereche $ab$, perechile disjuncte de ea se aleg din cele 3 elemente rămase, deci sunt $C_3^2 = 3$: fiecare vârf are gradul 3 şi graful are $10 \cdot 3/2 = 15$ muchii. Vârfurile $12, 34, 51, 23, 45$ formează (în această ordine) un 5-ciclu, la fel $35, 24, 13, 25, 14$, iar muchiile rămase unesc $12$ cu $35$, $34$ cu $25$, $51$ cu $24$, $23$ cu $14$ şi $45$ cu $13$. Numele "graful lui Petersen" desemnează de fapt o clasă de izomorfism: pentru a arăta că un desen dat reprezintă graful lui Petersen, este suficient să etichetăm vârfurile cu perechi din $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ astfel încât adiacenţa să coincidă cu disjuncţia (ex. 24/S).*

**Propoziţia 4.1** *În graful lui Petersen, două vârfuri adiacente nu au niciun vecin comun, iar două vârfuri neadiacente au exact un vecin comun.*

*Demonstraţie.* Dacă $x, y$ sunt adiacente, ele sunt perechi disjuncte, deci $x \cup y$ are $4$ elemente. O pereche disjunctă de ambele ar trebui să fie inclusă în singurul element rămas, ceea ce este imposibil. Dacă $x \neq y$ sunt neadiacente, ele au exact un element comun, deci $S = x \cup y$ are $3$ elemente. Un vecin comun este o pereche disjunctă de $S$, adică o pereche inclusă în $[5] \setminus S$, care are $2$ elemente. Există exact o astfel de pereche.

**Definiţia 16** ***Talia, sau circumferinţa*** *(girth, en.) unui graf care conţine cicluri este lungimea celui mai scurt ciclu al său. Un graf fără cicluri are, prin convenţie, talia infinită.*

**Corolarul 4.1** *Graful lui Petersen are talia $5$.*

*Demonstraţie.* Fiind simplu, graful nu are cicluri de lungime $1$ sau $2$. Un $3-$ciclu ar fi un triunghi, adică două vârfuri adiacente cu un vecin comun, iar un $4-$ciclu $x, y, z, w$ fără triunghiuri ar avea vârfurile neadiacente $x$ şi $z$ cu doi vecini comuni $y$ şi $w$. Ambele situaţii sunt excluse de Propoziţia 4.1. În fine, vârfurile $12, 34, 51, 23, 45$ formează un $5-$ciclu, deci talia grafului este $5$.

Graful lui Petersen este foarte simetric: orice permutare $\sigma$ a lui $[5]$ induce bijecţia $ab \mapsto \sigma(a)\sigma(b)$ pe vârfuri, care păstrează disjuncţia, deci este un izomorfism al grafului pe el însuşi. Obţinem astfel $5! = 120$ de astfel de izomorfisme (distincte, deoarece permutări diferite acţionează diferit pe perechi). Se poate arăta că nu există altele (ex. 43/S).

## 4.2 Automorfisme

**Definiţia 17** *Un **automorfism** al grafului $G$ este un izomorfism de la $G$ la $G$. Graful $G$ este **vârf-tranzitiv** dacă pentru orice $u, v \in V(G)$ există un automorfism care duce $u$ în $v$.*

Automorfismele lui $G$ sunt exact Ciclul $C_n$ ($n \geq 3$) are $2n$ automorfisme: cele $n$ rotaţii şi cele $n$ simetrii ale unui $n$-gon regulat. Într-adevăr, imaginea unui vârf fixat poate fi aleasă în $n$ moduri, iar imaginea unuia dintre vecinii săi în $2$ moduri, după care automorfismul este determinat.

**Exemplul 4.2** *1. Drumul cu vârfurile $1, 2, 3, 4$ şi muchiile $12, 23, 34$ are exact două automorfisme: identitatea şi permutarea $1 \leftrightarrow 4$, $2 \leftrightarrow 3$. Un automorfism păstrează gradele, deci duce vârfurile de grad $1$ (anume $1, 4$) între ele; odată fixată imaginea lui $1$, restul este determinat. Observăm că permutarea $1 \leftrightarrow 2$ nu este automorfism, deşi graful obţinut prin redenumire (muchiile $21, 13, 34$) este izomorf cu cel iniţial.*

2. *Graful $K_n$ are $n!$ automorfisme: orice permutare a vârfurilor.*

3. *Ciclul $C_n$ ($n \geq 3$) are $2n$ automorfisme: cele $n$ rotaţii şi cele $n$ simetrii ale unui $n$-gon regulat. Într-adevăr, imaginea unui vârf fixat poate fi aleasă în $n$ moduri, iar imaginea unuia dintre vecinii săi în 2 moduri, după care automorfismul este determinat.*

4. *În $K_{r,s}$, orice permutare a vârfurilor din aceeaşi clasă de bipartiţie este automorfism, deci există cel puţin $r! * s!$ automorfisme. Pentru $r \neq s$ acestea sunt toate. Pentru $r = s$, putem în plus interschimba cele două clase, deci $K_{r,r}$ are $2(r!)^2$ automorfisme.*

5. *Graful $K_{r,s}$ este vârf-tranzitiv dacă şi numai dacă $r = s$ (vârfurile au gradele $s$, respectiv $r$). Pentru $n > 2$, drumul $P_n$ nu este vârf-tranzitiv, pe când orice ciclu, orice graf complet şi graful lui Petersen sunt vârf-tranzitive.*

Într-un graf vârf-tranzitiv, orice afirmaţie structurală demonstrată pentru un vârf este valabilă pentru toate vârfurile: graful "arată la fel" din fiecare vârf.

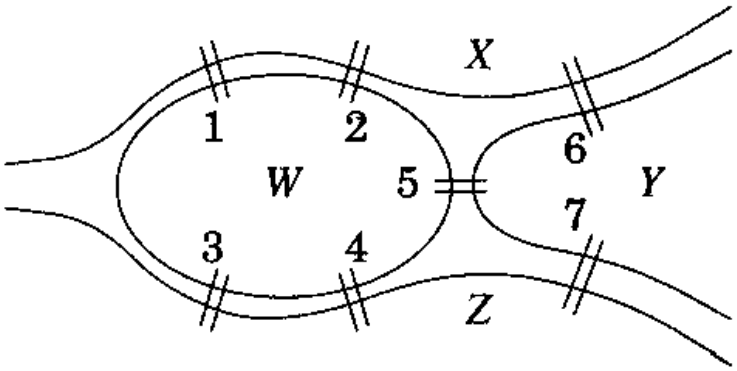
# 5 Conexiune, drumuri şi cicluri

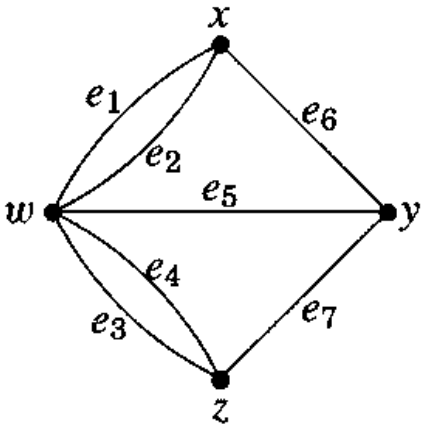
## 5.1 Definiţii şi caracterizări

Multe afirmaţii din teoria grafurilor pot fi demonstrate folosind principiul inducţiei. În această secţiune revenim la Problema podurilor din Königsberg, determinând când este posibil să parcurgem toate muchiile unui graf. De asemenea, vom dezvolta proprietăţi utile referitoare la conexiune, drumuri şi cicluri. Un pieton din Königsberg poate dori să permită repetarea vârfurilor, dar să evite repetarea muchiilor. Un poştaş livrează corespondenţa la casele de pe ambele părţi ale străzii şi, prin urmare, parcurge fiecare muchie de două ori.

**Definiţia 18** *Un **traseu (walk)** este o listă de vârfuri şi muchii $v_0, e_1, v_1, ..., e_k, v_k$ astfel încât, pentru fiecare $1 \leq i \leq k$, muchia $e_i = v_{i-1}v_i$. Un **traseu fără repetarea muchiilor (trail)** este un traseu în care nicio muchie nu se repetă. Un **drum (path)** $uv = (u, v)$ este un drum ale cărui vârfuri de grad $(1)$ (extremităţile sale) sunt $u$ şi $v$; celelalte vârfuri sunt numite **vârfuri interne**. Lungimea unui traseu, trail, drum sau ciclu este numărul său de muchii. Un traseu sau un trail este închis dacă extremităţile sale coincid.*

De exemplu, în graful Königsberg,




lista $x, e_2, w, e_5, y, e_6, x, e_1, w, e_2, x$ este un traseu închis de lungime $5$; muchia $e_2$ se repetă şi, prin urmare, acesta nu este un trail. Dacă ştergem ultima muchie şi ultimul vârf, obţinem un

trail de lungime $4$. Acesta repetă vârfuri, dar nu repetă muchii. Subgraful format din muchiile $e_1, e_5, e_6$ şi vârfurile $x, w, y$ este un ciclu de lungime $3$. Dacă ştergem una dintre muchiile sale, obţinem un drum. Două muchii care au aceleaşi extremităţi (cum ar fi $e_1$ şi $e_2$) formează un ciclu de lungime $2$. O buclă (loop) este un ciclu de lungime $1$. Motivul pentru care enumerăm muchiile într-un walk este acela de a putea face diferenţa între muchii multiple atunci când graful nu este simplu. Într-un graf simplu, un walk (sau trail) este complet determinat de lista ordonată a vârfurilor sale. De obicei, atunci când denumim un drum, ciclu, trail sau walk într-un graf simplu, enumerăm doar vârfurile sale în ordinea în care sunt parcurse, chiar dacă acesta este alcătuit atât din vârfuri, cât şi din muchii. Atunci când discutăm despre un ciclu, putem începe de la orice vârf şi nu repetăm primul vârf la sfârşit. Putem folosi paranteze pentru a clarifica faptul că este vorba despre un ciclu şi nu despre un drum.

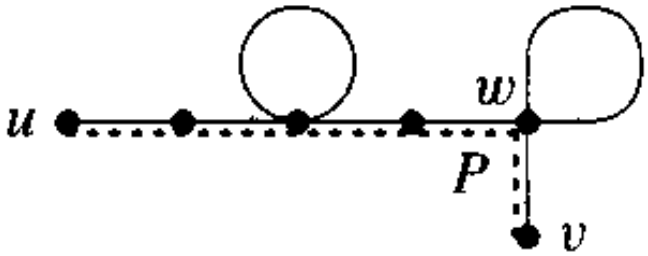
**Lema 5.1** *Orice walk $(u, v)$ conţine un drum $(u, v)$.*

*Demonstraţie.* Demonstrăm afirmaţia prin inducţie asupra lungimii $l$ a unui $(u, v)-$walk, notat $W$.

Pentru $l = 0$ : Neavând nicio muchie, $W$ este format dintr-un singur vârf $(u = v)$. Acest vârf este un $(u, v)-$path, de lungime $0$.

Pasul inductiv : Pentru $l > 1$, presupunem că afirmaţia este adevărată pentru walk-uri de lungime mai mică decât $l$. Dacă $W$ nu are niciun vârf repetat, atunci vârfurile şi muchiile sale formează un $(u, v)-$drum.

Dacă $W$ are un vârf repetat, $w$, atunci ştergem muchiile şi vârfurile dintre cele două apariţii ale lui $w$, păstrând o singură copie a lui $w$. Astfel obţinem un $(u, v)-$walk mai scurt, $W'$, care este conţinut în $W$. Conform ipotezei de inducţie, $W'$, conţine un $(u, v)-$drum, notat cu $P$, iar acest drum $P$ este, de asemenea, conţinut în $W$. Prin urmare, orice $(u, v)-$walk conţine un $(u, v)-$drum.




**Definiţia 19** *Un graf G este **conex** dacă are conţinut un drum $(u, v)$, pentru orice $u, v \in V(G)$ (în caz contrar, G este neconex). Dacă G are un drum $(u, v)$, atunci spunem că $u$ este conectat la $v$ în G. Relaţia de conexiune pe mulţimea vârfurilor $V(G)$ constă din perechile ordonate $(u, v)$ astfel încât $u$ este conectat la $v$.*

*Este util sa clarificăm diferenţa dinte conectare şi adiacenţă:*

$$\begin{array}{cc} G \text{ are un drum } (u,v) & uv \in E(G) \\ \left\{\begin{array}{l} u \text{ şi } v \text{ sunt conectate} \\ u \text{ este conectat la } v \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} u \text{ şi } v \text{ sunt adiacente} \\ u \text{ este legat de } v \\ u \text{ este adiacent la } v \end{array}\right. \end{array}$$

Conform Lemei 5.1, putem demonstra că un graf este conex arătând că, pornind de la fiecare vârf, există un walk până la un anumit vârf fix. Tot conform Lemei 5.1, relaţia de conexiune este tranzitivă: dacă G are un drum $(u, v)$ şi un drum $(v, w)$, atunci G are un drum $(u, w)$. Relaţia este, de asemenea:

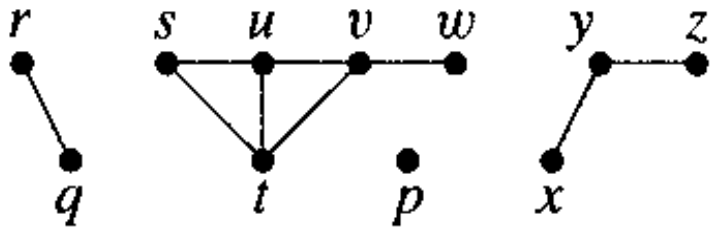
- reflexivă, deoarece există drumuri de lungime $0$;
- simetrică, deoarece drumurile pot fi parcurse în sens invers.

Prin urmare, relaţia de conexiune este o relaţie de echivalenţă. Următoarea definiţie ne conduce la clasele de echivalenţă ale relaţiei de conexiune.

**Definiţia 20** *Un **subgraf conex maximal** al lui $G$ este un subgraf care este conex şi care nu este inclus în niciun alt subgraf conex al lui $G$.*

**Definiţia 21** ***Componentele** unui graf $G$ sunt subgrafurile sale conexe maximale. O componentă (sau un graf) este **trivială** dacă nu are muchii; în caz contrar, este **netrivială**. Un **vârf izolat** este un vârf de grad $0$. Clasele de echivalenţă ale relaţiei de conexiune pe $V(G)$ sunt mulţimile de vârfuri ale componentelor lui $G$. Un vârf izolat formează o componentă trivială, alcătuită dintr-un singur vârf şi nicio muchie.*

**Exemplul 5.1** *Graful de mai jos are patru componente, dintre care una este un vârf izolat. Mulţimile de vârfuri ale componentelor sunt: $\{p\}, \{q, r\}, \{s, t, u, v, w\}, \{x, y, z\}$. Acestea sunt clasele de echivalenţă ale relaţiei de conexiune.*




*Componentele sunt disjuncte două câte două. Oricare două componente nu au vreun vârf în comun. Adăugarea unei muchii ale cărei extremităţi se află în componente distincte le combină într-o singură componentă. Prin urmare:*

- *adăugarea unei muchii scade numărul componentelor cu $0$ sau $1$;*
- *ştergerea unei muchii creşte numărul componentelor cu $0$ sau $1$.*

**Propoziţia 5.1** *Orice graf cu $n$ vârfuri şi $k$ muchii are cel puţin $n - k$ componente.*

*Demonstraţie.* Un graf cu $n$ vârfuri şi fără muchii are $n$ componente. Cu fiecare muchie adăugată, numărul lor se reduce cu cel mult $1$. Astfel, $k$ muchii adăugate va face ca numărul componentelor să fie cel puţin $n - k$.

**Observaţia 5.1** *Ştergerea unui vârf sau a unei muchii poate creşte numărul componentelor. Deşi ştergerea unei muchii poate creşte numărul componentelor doar cu $1$, ştergerea unui vârf îl poate creşte cu mai mult de atât (de exemplu, considerând graful bipartit complet $K_{1,m}$. Atunci când obţinem un subgraf prin ştergerea unui vârf, acesta trebuie să fie în continuare un graf, astfel încât ştergerea vârfului determină şi ştergerea tuturor muchiilor incidente acelui vârf.*

**Definiţia 22** *O **muchie de tăiere** (cut-edge) sau un **vârf de tăiere** (cut-vertex) al unui graf este o muchie, respectiv un vârf, a cărei/cărui ştergere creşte numărul componentelor. Notăm cu $G - e$, respectiv $G - M$ subgraful lui G obţinut prin ştergerea unei muchii $e$, respectiv a unei mulţimi de muchii $M$.*

*Similar, notăm cu $G - v$, respectiv $G - S$ subgraful obţinut prin ştergerea unui vârf $v$, respectiv a unei mulţimi de vârfuri $S$. Un **subgraf indus** este un subgraf obţinut prin ştergerea unei mulţimi de vârfuri. Notăm cu*

$$G[T] := G - \bar{T}, \qquad unde \qquad \bar{T} := V(G) - T.$$

*Acesta este subgraful lui G indus de T.*

*Când $T \subseteq V(G)$, subgraful indus $G[T]$ constă din vârfurile din $T$ şi din toate muchiile ale căror extremităţi aparţin lui $T$. Graful complet G însuşi este un subgraf indus, la fel ca şi fiecare vârf luat individual. O mulţime $S$ de vârfuri este o mulţime independentă dacă şi numai dacă subgraful indus de aceasta nu conţine nicio muchie.*

In graful din Exemplul 5.1, vârfurile de tăiere sunt $v$ şi $y$. Muchiile de tăiere sunt $qr, vw, xy, yz$. Acest graf conţine subgrafuri pe $C_4$ şi $P_5$, dar nu ca şi grafuri induse. Subgraful $P_4$ apare ca un subgraf indus de $\{s, t, v, w\}$ sau de $\{s, u, v, w\}$.

Putem acum caracteriza muchiile de tăiere din perspectiva ciclurilor grafului.

**Teorema 1** *O muchie $e \in E(G)$ este o muchie de tăiere dacă şi numai dacă ea nu aparţine unui ciclu.*

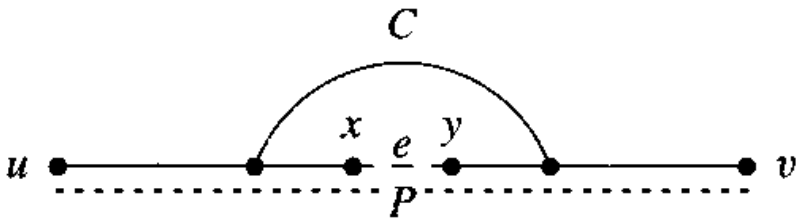
*Demonstraţie.* Fie $e$ o muchie dintr-un graf G, cu extremităţile $x$ şi $y$, şi fie $H$ componenta care conţine muchia $e$. Deoarece ştergerea lui $e$ nu afectează nicio altă componentă, este suficient să demonstrăm că $H - e$ este conex dacă şi numai dacă muchia $e$ aparţine unui ciclu.

Necesitatea: presupunem că $H - e$ este conex. Aceasta înseamnă că $H - e$ conţine un drum $(x, y)$. Acest drum, împreună cu muchia $e$, formează (completează) un ciclu.

Suficienţa: presupunem că muchia $e$ aparţine unui ciclu $C$. Alegem $u, v \in V(H)$ .Deoarece $H$ este conex, $H$ are un drum $(u, v)$, notat $P$.

- Dacă $P$ nu conţine muchia $e$, atunci $P$ există şi în $H - e$.
- Dacă $P$ conţine muchia $e$, presupunem, fără pierderea generalităţii, că $x$ se află între $u$ şi $y$ pe $P$. Deoarece $H - e$ conţine:
  - un drum $(u, x)$ de-a lungul lui $P$;
  - un drum $(x, y)$ de-a lungul ciclului $C$;
  - un drum $(y, v)$ de-a lungul lui $P$,

  atunci, prin tranzitivitatea relaţiei de conexiune, rezultă că $H - e$ are un drum $(u, v)$.




- Am demonstrat acest lucru pentru orice $u, v \in V(H)$, deci $H - e$ este conex. Prin urmare, o muchie este muchie de tăiere dacă şi numai dacă nu aparţine niciunui ciclu.

## 5.2 Grafuri bipartite

Reamintim că o buclă este un ciclu de lungime 1. De asemenea, două muchii distincte care au aceleaşi extremităţi formează un ciclu de lungime 2. Un walk este impar sau par, în funcţie de faptul că lungimea sa este impară sau pară.

Un walk închis $W$conţine un ciclu $C$ dacă vârfurile şi muchiile lui $C$ apar ca o sublistă a lui $W$, în ordine ciclică, dar nu neapărat consecutiv. Putem considera că un walk închis sau un ciclu începe de la orice vârf.

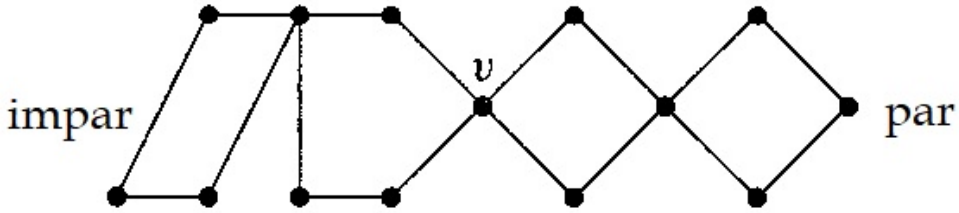
**Lema 5.2** *Orice walk închis de lungime impară conţine un ciclu impar.*

*Demonstraţie.* Folosim inducţia asupra lungimii $l$ a unui walk închis impar $W$.

Pentru $l = 1$, un walk închis de lungime 1 parcurge un ciclu de lungime 1.

Pasul inductiv: Pentru $l > 1$, presupunem că afirmaţia este adevărată pentru walk-uri închise impare mai scurte decât $W$. Dacă $W$ nu are niciun vârf repetat (cu excepţia primului, care coincide cu ultimul), atunci $W$ însuşi formează un ciclu de lungime impară.

Dacă un vârf $v$ se repetă în $W$, considerăm că $W$ începe în $v$ şi împărţim $W$ în două walk-uri $(v, v)$.




Deoarece $W$ are lungime impară, unul dintre aceste două walk-uri are lungime impară, iar celălalt are lungime pară. Walk-ul impar este mai scurt decât $W$. Conform ipotezei de inducţie, acesta conţine un ciclu impar, iar acest ciclu apare în ordine în $W$. Prin urmare, orice walk închis impar conţine un ciclu impar.

**Definiţia 23** *O **bipartiţie** a grafului G este o împărţire a mulţimii vârfurilor în două mulţimi disjuncte şi independente ale lui G, a căror reuniune este $V(G)$. Mai precis, un $(X, Y)-$bigraf este un graf bipartit cu bipartiţia vârfurilor $(X, Y)$.*

**Teorema 2** *Un graf este bipartit dacă şi numai dacă nu conţine cicluri de lungime impară.*

*Demonstraţie.*

Necesitatea: Pentru un graf $G$, fiecare walk alternează între cele două mulţimi ale bipartiţiei, deci fiecare întoarcere la mulţimea de plecare are loc după un numar par de muchii. Prin urmare, $G$ nu are cicluri impare.

Suficienţa: Fie un graf $G$ fără cicluri impare. Demonstrăm că el este bipartit prin construirea efectivă a bipartiţiei. Fie $u$ un vârf aflat într-o componentă netrivială $H$. Pentru fiecare $v \in H$, considerăm $f(v)$ lungimea minimală a unui path $(u, v)$. Cum $H$ este componentă conexă, $f(v)$ este corect definită pentru orice $v \in V(H)$.

Definim

$$\begin{cases} X & := & \{v \in V(H) : f(v) \text{ este par}\} \\ Y & := & \{v \in V(H) : f(v) \text{ este impar}\} \end{cases}$$

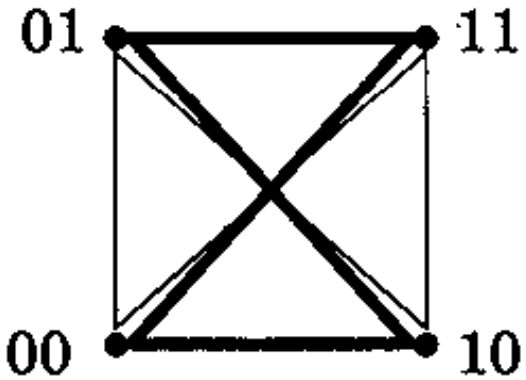
O muchie $v, v'$ în $X$ sau $Y$ ar crea un walk impar închis prin folosirea celui mai scurt $(u, v)$ −path, muchia $vv'$ şi reversul celui mai scurt $(u, v\prime)$ −path. Conform Lemmei 5.2, un asemenea walk ar trebui să conţină un ciclu impar, ceea ce ar contrazice ipoteza. Prin urmare, $X$ şi $Y$ sunt mulţimi independente de vârfuri şi

$$X \cup Y = V(H),$$

adică $H$ este un $(X, Y)$−bigraf.

**Definiţia 24** *Numim **uniunea** grafurilor $G_1, G_2, ..., G_k$, notată cu $G_1 \cup ... \cup G_k$ graful ce are ca mulţime a vârfurilor $\cup_{i=1}^{k} V(G_i)$ şi ca mulţime a muchiilor $\cup_{i=1}^{k} E(G_i)$.*

**Exemplul 5.2** *Mai jos prezentăm graful $K_4$ ca uniunea a două cicluri de lungime $4$. Atunci când un graf $G$ este exprimat ca uniunea a două sau mai multe subgrafuri, o muchie a lui $G$ poate aparţine mai multora dintre acestea. Acest lucru diferenţiază uniunea de descompunere, în care fiecare muchie aparţine unui singur subgraf din listă.*




**Exemplul 5.3** *Considerăm că avem un sistem de transport aerian, cu $k$ companii aeriene. Presupunem că:*

1. *serviciul direct între două oraşe înseamnă serviciu direct dus-întors şi*
2. *fiecare pereche de oraşe beneficiază de serviciu direct din partea a cel puţin unei companii aeriene.*
3. *Presupunem, de asemenea, că nicio companie aeriană nu poate programa un ciclu care trece printr-un număr impar de oraşe.*

*Care este numărul maxim de oraşe din sistem?*

*Conform Teoremei 2, căutăm cel mai mare număr natural $n$ astfel încât graful complet $K_n$ să poată fi exprimat ca uniunea a $k$ grafuri bipartite, câte unul pentru fiecare companie aeriană. Răspunsul este*

$$n = 2^k.$$

**Teorema 3** *Graful complet $K_n$ poate fi exprimat ca uniunea a $k$ grafuri bipartite dacă şi numai dacă $n \leq 2^k$.*

*Demonstraţie.* Inducţie după $k$.

Pentru $k = 1$, deoarece $K_3$ are un ciclu impar, iar $K_2$ nu are, $K_n$ este bipartit dacă şi numai dacă $n \leq 2$.

Presupunem acum că avem $k > 1$. Demonstrăm fiecare implicaţie folosind ipoteza de inducţie.

Să presupunem mai întâi că

$$K_n = G_1 \cup ... \cup G_k \, ,$$

unde fiecare $G_i$ este un graf bipartit. Împărţim mulţimea vârfurilor în două mulţimi de vârfuri $(X, Y)$, astfel încât $G_k$ să nu aibă nicio muchie cu ambele extremităţi în $X$ sau cu ambele extremităţi în $Y$. Reuniunea celorlalte $k-1$ subgrafuri bipartite trebuie să acopere subgrafurile complete induse de $X$ şi de $Y$. Aplicând ipoteza de inducţie fiecăruia dintre acestea, obţinem

$$|X| \leq 2^{k-1} \quad \text{şi} \quad |Y| \leq 2^{k-1}.$$

Prin urmare,

$$n \leq 2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k.$$

Reciproc, să presupunem că $n \leq 2^k$. Împărţim mulţimea vârfurilor în două submulţimi $(X, Y)$, fiecare de cardinal cel mult $2^{k-1}$. Conform ipotezei inductive, putem acoperi subgraful complet indus de fiecare dintre aceste submulţimi cu $k - 1$ subgrafuri bipartite.

Uniunea celui de-al $i$-lea astfel de subgraf pe $X$ cu cel de-al $i$-lea subgraf pe $Y$ este un graf bipartit. Prin urmare, obţinem $k - 1$ grafuri bipartite, a căror reuniune constă în subgrafurile complete induse de $X$ şi $Y$.

Muchiile rămase sunt cele ale bigrafului (biciclei) cu bipartiţia $(X, Y)$. Considerând acest bigraf drept al $k$-lea subgraf bipartit, construcţia este completă, iar demonstraţia teoremei încheiată.

# 6 Gradul vârfurilor şi probleme de numărare

Conceptul de grad al unui vârf este unul fundamental pentru studierea grafurilor. Reluăm definiţia prezentată anterior, prin introducerea unor notaţii importante. Pentru început, vom înţelege prin $[n] = \{1, 2, ..., n\}$.

**Definiţia 25** *Numim **gradul unui vârf** $v \in V(G)$ într-un graf $G$ şi vom nota $d_G(v)$, sau $d(v)$, numărul muchiilor incidente în $v$, cu menţiunea că fiecare buclă în $v$ se numără de două ori. Gradul maxim se notează cu $\Delta(G)$, iar cel minim cu $\delta(G)$. Spunem că $G$ este un graf **regulat** dacă $\Delta(G) = \delta(G)$. Graful se numeşte $k-$**regulat** dacă gradul comun este $k$.*

***Vecinătatea** unui vârf $v$, notată cu $N_G(v)$, sau $N(v)$, este mulţimea vârfurilor adiacente lui $v$.*

**Definiţia 26** ***Ordinul** unui graf $G$, notat cu $n(G)$, este numărul vârfurilor din $G$, adică $n(g) := card(V(G))$. **Dimensiunea** lui $G$ este $e(G) := card(E(G))$. Graful va fi numit graf $n-$vârfuri*

## 6.1 Numărare şi relaţii de bijectivitate

Un prim rezultat fundamental îl constituie numărarea muchiilor într-un graf, folosind gradele vârfurilor sale. Rezultatul obţinut imediat este un instrument util în studierea grafurilor, fiind denumit "Handshaking Lemma".

**Lema 6.1 (Formula Sumei Gradelor)** *Dacă $G$ este un graf, atunci*

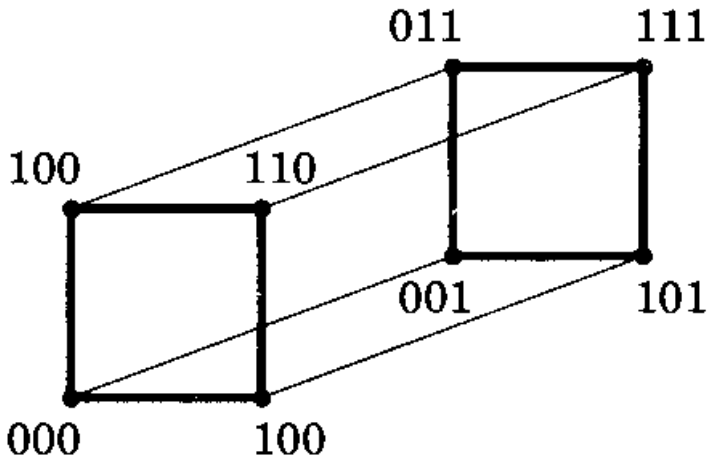
$$\sum_{u \in V(G)} d(v) = 2e(G).$$

**Corolarul 6.1** $(a)$ *Într-un graf $G$, gradul mediu al unui vârf este, evident $\frac{2e(G)}{n(G)}$ şi, prin urmare,*

$$\delta(G) \leq \frac{2e(G)}{n(G)} \leq \Delta(G).$$

$(b)$ *Orice graf are un număr par de vârfuri de grad impar şi niciun graf de ordin impar nu este regulat cu grad impar.*
$(c)$ *Un graf $k$-regulat cu $n$ vârfuri are $nk/2$ muchii.*

**Definiţia 27** *Cubul $k-$dimensional (denumit şi hipercubul $Q_k$) este graful simplu ale cărui noduri sunt $k-$tuplurile ce iau valori din mulţimea $\{0,1\}$ şi ale cărui muchii sunt incidente în vârfurile ce diferă prin exact o componentă. Un **subcub $j-$dimensional** al lui $Q_k$ este un subgraf al lui $Q_k$, izomorf cu $Q_j$.*




Spre exemplu, hipercubul este o arhitectură naturală pentru design-ul calculatoarelor. Procesoarele pot comunica direct dacă ele corespund unor vârfuri adiacente în $Q_k$,iar $k$-tuplurile care identifică vârfurile servesc drept adrese pentru procesoare.

**Exemplul 6.1 (Structura hipercuburilor)** *Paritatea unui vârf din $Q_k$ este paritatea numărului de 1-uri din reprezentarea sa, adică pară sau impară. Fiecare muchie din $Q_k$ are ca extremităţi un vârf par şi un vârf impar. Prin urmare, vârfurile pare formează o mulţime independentă, la fel şi vârfurile impare, iar $Q_k$ este un graf bipartit.*

*Fiecare poziţie din $k$-tupluri poate fi specificată în două moduri, astfel că*

$$n(Q_k) = 2^k.$$

*Un vecin al unui vârf se obţine schimbând una dintre cele $k$ poziţii din reprezentarea sa cu cealaltă valoare. Prin urmare, $Q_k$ este $k-$regulat, conform Corolarului 6.1-$(c)$, are $e(Q_k) = 2^{k-1}$ muchii.*

*Muchiile evidenţiate mai sus indică două subgrafuri ale lui $Q_3$ izomorfe cu $Q_2$, obţinute menţinând ultima coordonată fixată la 0, respectiv la 1. Putem forma un subcub $j$-dimensional menţinând fixe oricare $k-j$ coordonate şi permiţând valorilor din celelalte $j$ coordonate să parcurgă toate cele $2^j$ posibile $j$-tupluri. Subgraful indus de o astfel de mulţime de vârfuri este izomorf cu $Q_j$.*

*Deoarece există $C_k^j$ moduri de a alege cele $j$ coordonate care variază şi $2^{k-j}$ moduri de a specifica valorile coordonatelor fixe, acest lucru determină existenţa a*

$$C_k^j 2^{k-j}$$

*astfel de subcuburi. De fapt, nu există alte subcuburi $j-$dimensionale.*

*Copiile lui $Q_1$ sunt pur şi simplu muchiile din $Q_k$. Formula se reduce la $k2^{k-1}$ atunci când $j = 1$, astfel că am găsit un alt argument de numărare pentru calcularea lui $e(Q_k)$.*

*Un hipercub este deci graf bipartit regulat. Un elementar argument de numărare furnizează o observaţie fundamentală referitoare la astfel de grafuri.*

**Propoziţia 6.1** *Dacă $k > 0$, atunci un graf bipartit $k-$regulat are acelaşi număr de vârfuri în fiecare mulţime din partiţie.*

*Demonstraţie.* Fie $G$ un $(X, Y)$ bigraf. Numărarea muchiilor din perspectiva extremităţilor lor din $X$, respectiv din $Y$, conduce la

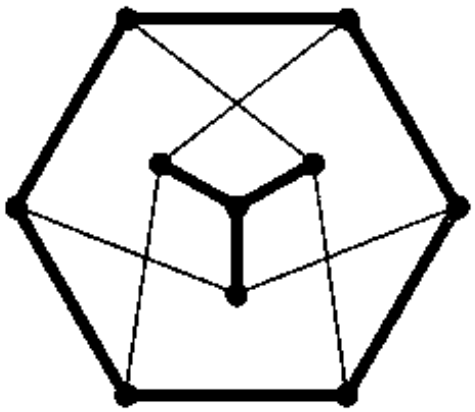
$$e(G) = k|X|, \quad \text{respectiv} \quad e(G) = k|Y|.$$

Prin urmare, $|X| = |Y|$.

**Exemplul 6.2** *Graful Petersen are zece cicluri de lungime 6. Fie $G$ graful Petersen. Fiind $3-$regulat, $G$ are zece copii ale lui $K_{1,3}$ (subgraf gheară/claw). Stabilim o corespondenţă biunivocă între ciclurile de lungime 6 şi gheare.*

*Deoarece $G$ are circumferinţa 5, fiecare ciclu de lungime 6, notat $F$, este un subgraf indus. Fiecare vârf al lui $F$ are un singur vecin în afara lui $F$. Deoarece vârfurile neadiacente au exact un vecin comun (Propoziţia 4.1), vârfurile opuse de pe $F$ au un vecin comun în afara lui $F$.*

*Deoarece $G$ este 3-regulat, cei trei vârfuri astfel obţinute din afara lui $F$ sunt distincte. Prin urmare, ştergerea lui $V(F)$ lasă un subgraf cu trei vârfuri de grad 1 şi un vârf de grad 3. Acesta este o gheară.*



*Arătăm că fiecare gheară $H$ din $G$ apare exact o dată în acest mod. Fie $S$ mulţimea vârfurilor de grad 1 din $H$, ceea ce spune că $S$ este o mulţime independentă. Vârful central al lui $H$ este deja un vecin comun, astfel încât celelalte şase muchii care pornesc din $S$ ajung la vârfuri distincte.*

*Prin urmare, $G-V(H)$ este $2-$regulat. Deoarece $G$ are circumferinţa egală cu 5, $G-V(H)$ trebuie să fie un ciclu de lungime 6. Acest ciclu de lungime 6 produce $H$, atunci când vârfurile sale sunt şterse.*

Prezentăm încă un argument de numărare legat de o conjectură celebră: Subgrafurile obţinute prin ştergerea unui singur vârf nu trebuie să fie toate distincte. De exemplu, cele $n$ subgrafuri obţinute prin ştergerea unui vârf din $C_n$ sunt toate izomorfe cu $P_{n-1}$.

**Propoziţia 6.2** *Considerăm un graf simplu $G$, cu vârfurile $v_1, ..., v_n$, pentru $n \geq 3$. Atunci avem:*

$$e(G) = \frac{\sum_{i=1}^{n} e(G - v_i)}{n-2} \qquad \text{şi} \qquad d_G(v_j) = \frac{\sum_{i=1}^{n} e(G - v_i)}{n-2} - e(G - v_j)$$

*Demonstraţie.* O muchie $e \in E(G)$ apare şi în $G - v_i$ dacă şi numai dacă $v_i$ nu e extremitate a lui $e$. Prin urmare, $\sum_{i=1}^{n} (G - v_i)$ conţine fiecare muchie exact de $n - 2$ ori.

Odată ce cunoaştem $e(G)$, gradul lui $v_j$ poate fi determinat ca numărul muchiilor pierdute atunci când ştergem vârful $v_j$ pentru a forma $G - v_j$.

**Conjectura reconstrucţiei.** Dacă $G$ este un graf simplu cu cel puţin trei vârfuri, atunci $G$ este determinat în mod unic de lista subgrafurilor sale obţinute prin ştergerea unui vârf (mai precis, de clasele de izomorfism ale acestor subgrafuri).

## 6.2 Probleme de optimalitate în grafuri

O problemă extremală (de optimalitate) se referă la determinarea valoarii maxime sau minime a unei funcţii pe o clasă de obiecte. De exemplu, numărul maxim de muchii într-un graf simplu cu $n$ vârfuri este $C_n^2$.

**Propoziţia 6.3** *Numărul minim de muchii într-un graf conex cu $n$ vârfuri este $n - 1$.*

*Demonstraţie.* Conform Propoziţ orice graf cu $n$ vârfuri şi $k$ muchii are cel puţin $n - k$ componente. Prin urmare, orice graf cu $n$ vârfuri şi mai puţin de $n - 1$ muchii are cel puţin două componente şi este neconex.

Reciproca acestei afirmaţii este că orice graf conex cu $n$ vârfuri are cel puţin $n - 1$ muchii. Această limită inferioară este atinsă de drumul $P_n$.

**Observaţia 6.1** *Pentru a demonstra că $\beta$ este minimul lui $f(G)$ pentru grafurile dintr-o clasă $\mathcal{G}$, trebuie să arătăm două lucruri:*

1. *$f(G) > \beta$ pentru orice $G \in \mathcal{G}$;*
2. *$f(G) = \beta$ pentru un anumit $G \in \mathcal{G}$.*

*Demonstraţia mărginii trebuie să se aplice oricărui $G \in \mathcal{G}$. Pentru egalitate este suficient să obţinem un exemplu în $\mathcal{G}$ cu valoarea dorită a lui $f$. Schimbarea lui $\geq$ în $\leq$ dă criteriile pentru un maxim.*

**Propoziţia 6.4** *Dacă $G$ este un graf simplu cu $n$ vârfuri şi*

$$\delta(G) \geq \frac{n-1}{2},$$

*atunci $G$ este conex.*

*Demonstraţie.* Alegem $u, v \in V(G)$. Este suficient să arătăm că $u, v$ au un vecin comun dacă nu sunt adiacente. Deoarece $G$ este simplu, avem

$$|N(u)| \geq \delta(G) \geq \frac{n-1}{2},$$

şi similar pentru $v$. Când $u \neq v$, avem $|N(u) \cup N(v)| \leq n-2$, deoarece $u$ şi $v$ nu sunt în reuniune. Astfel,

$$|N(u) \cap N(v)| = |N(u)| + |N(v)| - |N(u) \cup N(v)| \geq \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} - (n-2) = 1.$$

Spunem că un rezultat este cel mai bun posibil sau precis atunci când există un aspect al lui care nu poate fi întărit fără ca afirmaţia să devină falsă. După cum arată exemplul următor, acest lucru este valabil pentru propoziţia precedentă; când $\delta(G)$ este mai mic decât $(n(G)-1)/2$, nu mai putem concluziona că $G$ trebuie să fie conex.

**Definiţia 28** *Graful obţinut luând reuniunea grafurilor $G$ şi $H$ cu mulţimi de vârfuri disjuncte se numeşte reuniunea disjunctă sau suma, notată $G+H$. În general, $mG$ este graful format din $m$ copii două câte două disjuncte ale lui $G$.*

**Observaţia 6.2** *În teoria grafurilor, folosim "problema optimală" pentru găsirea unui optim pe o clasă de grafuri. Când căutăm extreme într-un singur graf, cum ar fi dimensiunea maximă a unei mulţimi independente sau dimensiunea maximă a unui subgraf bipartit, avem o problemă diferită pentru fiecare graf. Pentru a le deosebi de tipul anterior de problemă, le numim probleme de optimizare.*

În această perspectivă considerăm problema găsirii unui *subgraf bipartit mare*. Ea ne permite să introducem tehnica demonstraţiei constructive sau "algoritmice".

**Teorema 4** *Orice graf $G$, fără bucle, are un subgraf bipartit cu cel puţin*

$$\frac{e(G)}{2}$$

*muchii.*

*Demonstraţie.* Începem cu orice partiţie a lui $V(G)$ în două mulţimi $X, Y$:

$$V(G) = X \cup Y, \qquad X \cap Y = \emptyset.$$

Folosind doar muchiile care au câte un capăt în fiecare mulţime, obţinem un subgraf bipartit $H$, cu bipartiţia $X, Y$.

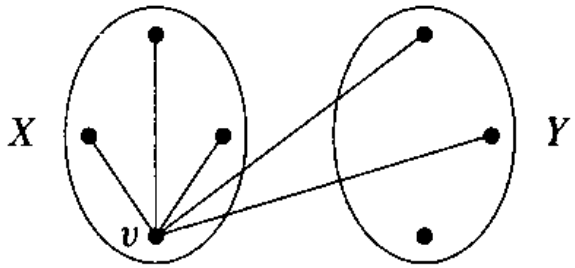
Dacă $H$ conţine mai puţin decât jumătate din muchiile lui $G$ incidente cu un vârf $v$, atunci $v$ are mai multe muchii către vârfurile din propria clasă decât către cealaltă clasă, după cum este ilustrat mai jos. Mutarea lui $v$ în cealaltă clasă câştigă mai multe muchii ale lui $G$ decât pierde.

Mutăm câte un vârf în acest mod atât timp cât subgraful bipartit curent conţine mai puţin decât jumătate dintre muchiile incidente cu vreun vârf. Fiecare astfel de schimbare măreşte dimensiunea subgrafului, deci procesul trebuie să se termine într-un număr finit de paşi. La finalizare, avem că

$$d_H(v) \geq \frac{d_G(v)}{2}, \qquad \forall v \in V(G).$$

Adunând aceste inegalităţi şi aplicând formula sumei gradelor obţinem

$$e(H) \geq \frac{e(G)}{2}.$$



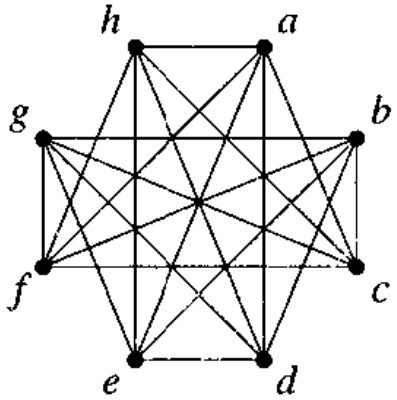

Demonstraţiile algoritmice corespund, de regulă, demonstraţiilor prin inducţie sau optimalităţii. De exemplu, iată demonstraţia teoremei de mai sus în limbajul optimalităţii şi al contradicţiei; alegerea optimală a lui $H$ duce direct la sfârşitul algoritmului:

Fie $H$ subgraful bipartit al lui $G$ care are cele mai multe muchii. Dacă $d_H(v) \geq d_G(v)/2$ pentru orice $v \in V(G)$, atunci formula sumei gradelor dă $e(H) \geq e(G)/2$. În caz contrar, $d_H(v) < d_G(v)/2$ pentru un $v \in V(G)$, iar schimbarea lui $v$ în bipartiţie contrazice alegerea lui $H$.

**Exemplul 6.3 (Maximum local)** *Algoritmul din teorema de mai sus nu trebuie să producă un subgraf bipartit cu cele mai multe muchii, ci doar unul cu cel puţin jumătate dintre muchii.*

1. *Graful de mai jos este regulat de grad* $5$*, cu* $8$ *vârfuri şi, prin urmare, are* $20$ *de muchii.*
2. *Bipartiţia* $X = \{a, b, c, d\}$ *şi* $Y = \{e, f, g, h\}$ *produce un subgraf bipartit regulat de grad* $3$ *cu* $12$ *muchii. Algoritmul se termină aici. Schimbarea unui vârf ar câştiga două muchii, dar ar pierde trei.*

*Totuşi, bipartiţia* $X = \{a, b, g, h\}$ *şi* $Y = \{c, d, e, f\}$ *produce un subgraf bipartit regulat de grad* $4$ *cu* $16$ *muchii. Un algoritm care caută maximul prin schimbări locale se poate bloca într-un maxim local.*




**Observaţia 6.3** *Într-un graf* $G$*, numărul maxim (global) de muchii într-un subgraf bipartit este* $e(G)$ *minus numărul minim de muchii necesare pentru a obţine cel puţin o muchie din fiecare ciclu impar.*

**Definiţia 29** *Un graf* $G$ *este* $H$*-free dacă* $G$ *nu are niciun subgraf indus izomorf cu* $H$*.*

**Teorema 5** ***(Mantel [1907]).*** *Numărul maxim de muchii într-un graf simplu cu* $n$ *vârfuri fără triunghiuri este:*

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor .$$

*Demonstraţie.* Fie $G$ un graf simplu cu $n$ vârfuri şi fără triunghiuri.

Fie $x$ un vârf de grad maxim, cu $k = d(x)$. Deoarece $G$ nu are triunghiuri, nu există muchii între vecinii lui $x$. Prin urmare, suma gradelor lui $x$ şi ale nevecinilor săi numără cel puţin un capăt al fiecărei muchii:

$$\sum_{v \notin N(x)} d(v) \geq e(G). \tag{1}$$

Cum $k = d(x)$, înseamnă că el are exact $k$ vecini. Exceptând aceşti $k$ vecini, împreună cu $x$, există în graf $n - k$ vârfuri, dintre care unul este $x$, iar ceilalţi $n - k - 1$ nevecini ai săi. Prin urmare, (1) are loc pentru $n - k$ situaţii similare fixate.

Adunăm pentru cele $n - k$ vârfuri, fiecare având grad cel mult $k$, deci

$$e(G) \leq (n - k)k.$$

Deoarece $(n - k)k$ numără muchiile dintr-un graf bipartit

$$K_{n-k,k},$$

am demonstrat că $e(G)$ este mărginit de dimensiunea unui biclicu cu $n$ vârfuri. Mutarea unui vârf din $K_{n-k,k}$ din mulţimea de dimensiune $k$ în mulţimea de dimensiune $n - k$ câştigă $k - 1$ muchii şi pierde $n - k$ muchii. Câştigul net este

$$k - 1 - (n - k) = 2k - n - 1 \quad \begin{cases} \leq 0, & 2k > n + 1 \\ \geq 0, & 2k < n + 1. \end{cases}$$

Astfel $e(K_{n-k,k})$ este maxim atunci când $k = \lfloor n/2 \rfloor$ sau $k = \lceil n/2 \rceil$. Cu alte cuvine, cele două mulţimi de vârfuri trebuie să fie echilibrate, având fiecare

$$\begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{vârfuri, dacă } n \text{ este par} \\ \dfrac{n-1}{2}, \dfrac{n+1}{2} & \text{vârfuri, dacă } n \text{ este impar} \end{cases}$$

Produsul este atunci $n^2/4$ pentru $n$ par şi $(n^2 - 1)/4$ pentru $n$ impar. Astfel,

$$e(G) \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

Pentru a demonstra că limita este cea mai bună posibilă, este maximală, prezentăm un graf fără triunghiuri şi cu $\lfloor n^2/4 \rfloor$ muchii. Acesta este:

$$K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}.$$

Deşi $(n - k)k$ poate fi maximizat în raport cu $k$ folosind calculul diferenţial, abordarea discretă este preferabilă în anumite privinţe. Ea restrânge direct $k$ la un număr întreg şi se generalizează uşor la mai multe variabile.

Rezultatul lui Mantel ne oferă un alt motiv pentru formularea demonstraţiilor inductive în formatul pe care l-am folosit. Motivul este siguranţa.

**Observaţia 6.4** *Adesea, afirmaţia pe care vrem să o demonstrăm prin inducţie după $n$ este o implicaţie:*

$$A(n) \Longrightarrow B(n).$$

*Trebuie să demonstrăm că orice instanţă $G$ care satisface $A(n)$ satisface şi $B(n)$. Pasul inductiv urmează un format tipic. Din $G$ obţinem o instanţă mai mică $G'$. Dacă arătăm că $G'$ satisface $A(n-1)$, atunci ipoteza de inducţie implică faptul că $G'$ satisface $B(n - 1)$. Acum folosim informaţia că $G'$ satisface $B(n - 1)$ pentru a demonstra că $G$ satisface $B(n)$.*

## 6.3 Secvenţe grafice

**Definiţia 30** *Secvenţa de grade a unui graf este lista gradelor vârfurilor, de obicei scrisă în ordine descrescătoare, ca* $d_1 \geq \cdots \geq d_n$.

Orice graf are o secvenţă de grade, dar ce secvenţe apar? Adică, date fiind numere întregi nenegative $d_1, \ldots, d_n$, există un graf cu acestea ca fiind grade ale vârfurilor? Formula sumei gradelor implică faptul că $\sum d_i$ trebuie să fie par. Când permitem bucle şi muchii multiple, aceasta este şi o condiţie suficientă.

**Propoziţia 6.5** *Numerele întregi nenegative* $d_1, \ldots, d_n$ *sunt gradele vârfurilor unui graf dacă şi numai dacă* $\sum d_i$ *este par.*

*Demonstraţie.*
Necesitatea. Dacă un graf $G$ are aceste numere ca grade ale vârfurilor, formula sumei gradelor implică

$$\sum_{i=1}^{|V(G)|} d_i = 2e(G),$$

care este par.
Suficienţa. Presupunem că $\sum_i d_i$ este par. Construim un graf cu mulţimea de vârfuri $v_1, \ldots, v_n$ şi

$$d(v_i) = d_i\ , \qquad \forall i = 1, ..., |V\,(G)|\,.$$

Deoarece $\sum d_i$ este par, numărul valorilor impare este par. Mai întâi formăm o împerechere arbitrară a vârfurilor din mulţimea

$$\{v_i : d_i \text{ este impar}\}.$$

Pentru fiecare pereche obţinută, formăm o muchie având aceste două vârfuri ca extremităţi. Gradul rămas necesar la fiecare vârf este par şi nenegativ; îl satisfacem pentru fiecare $i$ punând $\lfloor d_i/2 \rfloor$ bucle în $v_i$ , iar demonstraţia este încheiată.

Această demonstraţie este constructivă, dar am putea folosi şi inducţia. Construcţia este uşoară atunci când sunt disponibile bucle. Fără ele, secvenţa de grade $(2, 0, 0)$ nu este realizabilă, iar condiţia nu mai este şi suficientă. În continuare caracterizăm secvenţele de grade ale **grafurilor simple** printr-o condiţie recursivă care produce cu uşurinţă un algoritm. Sunt cunoscute multe alte caracterizări.

**Definiţia 31** *O secvenţă grafică este o listă de numere nenegative care este secvenţa de grade a unui graf simplu. Un graf simplu* $G$*, ce are secvenţa de grade* $d$*, spunem că "realizează" pe* $d$*.*

**Teorema 6** ***(Havel [1955], Hakimi [1962]).*** *Pentru* $n > 1$*, o listă* $d$*, de numere naturale, de dimensiune* $n$ *este grafică dacă şi numai dacă* $d'$ *este grafică, unde* $d'$ *se obţine din* $d$ *prin ştergerea celui mai mare element al său* $\Delta$ *şi scăderea cu* $1$ *a următoarelor sale* $\Delta$ *elemente cele mai mari. Singura secvenţă grafică cu un singur element este* $d_1 = 0$*.*

*Demonstraţie.* Pentru $n = 1$, afirmaţia este trivială. Pentru $n > 1$, demonstrăm mai întâi că această condiţie este *suficientă*.

Dată fiind secvenţa $d$, cu componentele naturale

$$d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$$

şi un graf simplu $G'$ cu secvenţa de grade $d'$, construită precum în enunţ. Dacă este nevoie, le reordonăm descrescător. Adăugăm un vârf nou adiacent vârfurilor din $G'$ cu gradele

$$d_2 - 1, \ldots, d_{\Delta+1} - 1.$$

Acestea sunt cele $\Delta$ elemente cele mai mari ale lui $d$ după o copie a lui $\Delta$ însuşi, dar $d_2 - 1, \ldots, d_{\Delta+1} - 1$ nu trebuie să fie şi cele mai mari $\Delta$ numere din $d'$.

Pentru a demonstra *necesitatea*, pornim cu un graf simplu $G$ care realizează $d$ şi producem un graf simplu $G'$ care realizează $d'$. Fie $w$ un vârf de grad $\Delta$ în $G$, el nefiind neapărat unic:

$$d(w) = \Delta, \quad \text{în } G.$$

. Fie $S$ o mulţime de $\Delta$ vârfuri în $G$ având "gradele dorite" $d_2, \ldots, d_{\Delta+1}$. Dacă

$$N(w) = S,$$

atunci ştergem $w$ pentru a obţine $G'$.

Altfel, un vârf din $S$ lipseşte din $N(w)$ :

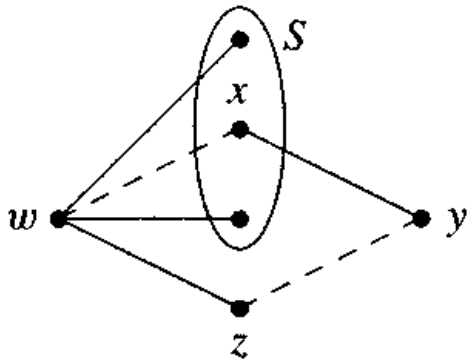
$$S \setminus N(w) \neq \emptyset.$$

În acest caz, modificăm $G$ pentru a mări numărul vecinilor lui $w$ cu vârfuri ce au gradele dorite, adică pe $|N(w) \cap S|$, dar fără a schimba vreun grad. Deoarece $|N(w) \cap S|$ poate creşte de cel mult $\Delta$ ori, repetarea acestui procedeu transformă $G$ într-un alt graf $G^*$, care realizează $d$ şi are $S$ ca vecinătate a lui $w$. Din $G^*$ ştergem apoi $w$ pentru a obţine graful dorit $G'$ care realizează $d'$.

**Mai precis**, pentru a găsi modificarea de mai sus atunci când $N(w) \neq S$, alegem $x \in S$ şi $z \notin S$ astfel încât

$$wz \in E(G) \qquad \text{şi} \qquad wx \notin E(G).$$

Dorim să adăugăm $wx$ şi să ştergem $wz$, dar trebuie să păstrăm gradele vârfurilor. Deoarece $d(x) > d(z)$ şi deja $w$ este vecin al lui $z$, dar nu al lui $x$, există un vârf $y$ adiacent lui $x$, dar nu lui $z$. Atunci ştergem muchiile $\{wz, xy\}$ şi adăugăm muchiile $\{wx, yz\}$ pentru a mări $|N(w) \cap S|$, aşa cum vedem în reprezentarea de mai jos:

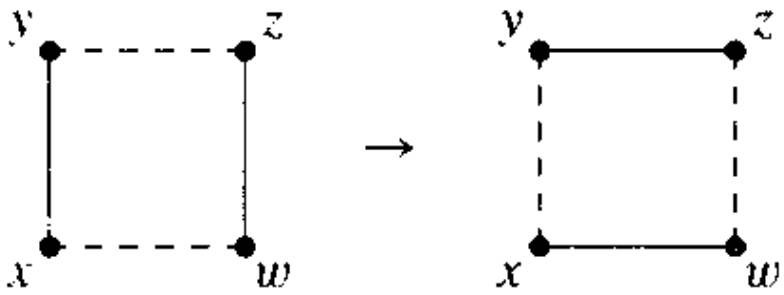



Teorema anterioară testează o listă de $n$ numere prin testarea unei liste de $n - 1$ numere. Ea produce un algoritm recursiv pentru a testa dacă $d$ este grafică. Condiţia necesară "$\sum d_i$ par" este implicită: $\sum d_i = (\sum d'_i) + 2\Delta$ implică faptul că $\sum d_i$ şi $\sum d'_i$ au aceeaşi paritate.

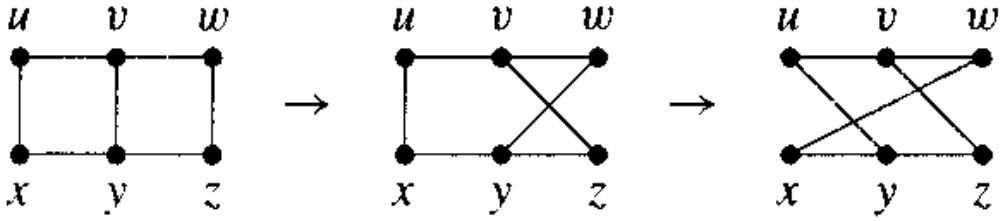
O demonstraţie algoritmică folosind "schimbarea locală" împinge un obiect spre o condiţie dorită. Aceasta poate fi formulată ca demonstraţie prin inducţie, unde parametrul de inducţie este "distanţa" faţă de condiţia dorită. În demonstraţia teoremei anterioare, această distanţă este numărul de vârfuri din $S$ care lipsesc din $N(w)$.

Am folosit schimbări de muchii pentru a transforma un graf arbitrar cu secvenţa de grade $d$ într-un graf care satisface condiţia dorită. În continuare vom arăta că orice graf simplu cu secvenţa de grade $d$ poate fi transformat prin astfel de schimbări în oricare altul.

**Definiţia 32** *Un 2-switch este înlocuirea unei perechi de muchii $xy$ şi $zw$ dintr-un graf simplu cu muchiile $yz$ şi $wx$, cu condiţia ca $yz$ şi $wx$ să nu fi apărut deja în graf.*




Liniile punctate de mai sus indică perechi neadiacente. Dacă $yz$ sau $wx$ ar fi fost deja muchii în graf, 2-switch-ul nu poate fi efectuat, deoarece graful rezultat nu ar fi simplu. Un 2-switch păstrează toate gradele vârfurilor. Dacă un 2-switch transformă $H$ în $H^*$, atunci un 2-switch pe aceleaşi patru vârfuri transformă $H^*$ în $H$. Mai jos ilustrăm două 2-switch-uri succesive.




**Teorema 7 (Berge)** *Dacă $G$ şi $H$ sunt două grafuri simple cu aceeaşi mulţime de vârfuri $V$, atunci $d_G(v) = d_H(v)$, pentru orice $v \in V$ dacă şi numai dacă există o succesiune de 2-switch-uri care transformă $G$ în $H$.*

*Demonstraţie.* Orice 2-switch păstrează gradele vârfurilor, deci condiţia este suficientă.

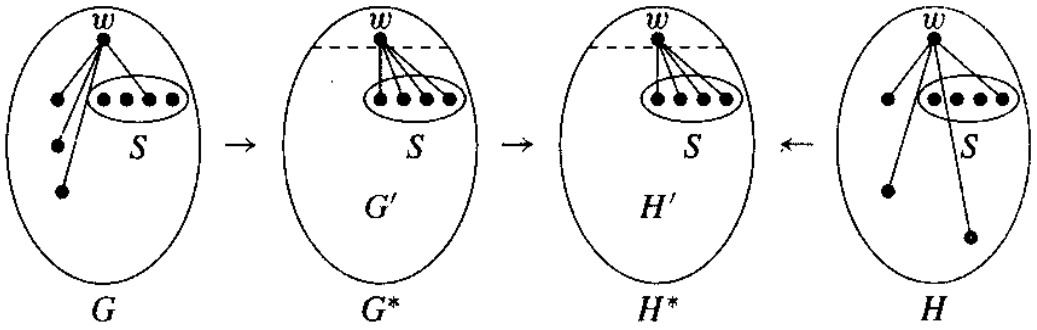
*Reciproc*, presupunem că $d_G(v) = d_H(v)$, pentru orice $v \in V$. Obţinem o succesiune potrivită de 2-switch-uri, prin inducţie după numărul de vârfuri, $n$.

Dacă $n \leq 3$, atunci pentru fiecare $d_1, \ldots, d_n$ există cel mult un graf simplu cu $d(v_i) = d_i$. Putem folosi deci $n = 3$ ca pas de plecare.

Considerăm $n \geq 4$ şi fie $w$ un vârf de grad maxim, $\Delta$. Fie

$$S = \{v_1, \ldots, v_\Delta\}$$

o mulţime fixată de vârfuri, cu cele mai mari $\Delta$ grade, altele decât $w$. Ca în demonstraţia teoremei Havel–Hakimi, o anumită succesiune de 2-switch-uri transformă $G$ într-un graf $G^*$ astfel încât $N_{G^*}(w) = S$, iar o asemenea succesiune transformă $H$ într-un graf $H^*$ astfel încât $N_{H^*}(w) = S$.




Deoarece

$$N_{G^*}(w) = N_{H^*}(w),$$

ştergerea lui $w$ lasă grafuri simple

$$G'^* - w \qquad \text{şi} \qquad H'^* - w$$

cu $d_{G'}(v) = d_{H'}(v)$, pentru orice vârf $v$. Prin ipoteza de inducţie, o succesiune de 2-switch-uri transformă $G'$ în $H'$. Deoarece acestea nu îl implică pe $w$, iar $w$ are aceiaşi vecini în $G^*$ şi $H^*$, aplicarea acestei succesiuni transformă $G^*$ în $H^*$. Prin urmare, putem transforma $G$ în $H$ transformând $G$ în $G^*$, apoi $G^*$ în $H^*$, apoi, în ordine inversă, transformarea lui $H$ în $H^*$.

Am putea formula acest lucru şi folosind inducţia după numărul muchiilor care apar exact într-unul dintre $G$ şi $H$, care este $0$ dacă şi numai dacă ele sunt deja egale. În această abordare, este suficient să găsim un 2-switch în $G$ care îl apropie de $H$ sau un 2-switch în $H$ care îl apropie de $G$.

# 7 Grafuri orientate

Am folosit grafurile pentru a modela relaţii simetrice. O relaţie nu trebuie să fie simetrică neapărat. În general, o relaţie pe $S$ poate fi orice mulţime de perechi ordonate din $S \times S$. Pentru astfel de relaţii avem nevoie de un model mai general.

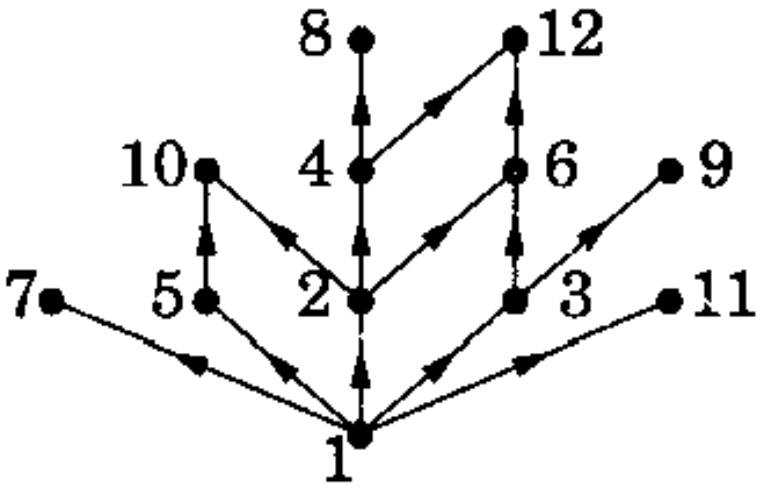
## Definiţii şi exemple

Căutarea unei reprezentări grafice a informaţiei dintr-o relaţie generală pe $S$ conduce la un model de grafuri orientate.

**Exemplul 7.1** *Pentru numere naturale $x, y$, spunem că $x$ este un "divizor maximal" al lui $y$ dacă $y/x$ este număr prim. Pentru $S \subseteq \mathbb{N}$, mulţimea*

$$R = \{(x, y) \in S^2 : x \text{ este un divizor maximal al lui } y\}$$

*este o relaţie pe $S$. Pentru a o reprezenta grafic, asociem fiecărui element din $S$ un punct în plan şi desenăm o săgeată de la $x$ la $y$ ori de câte ori $(x, y) \in R$. Mai jos este rezultatul pentru $S = [12]$.*




**Definiţia 33** *Un graf orientat sau digraf $G$ este un triplet alcătuit dintr-o mulţime de vârfuri $V(G)$, o mulţime de muchii $E(G)$ şi o funcţie care asociază fiecărei muchii o pereche ordonată de vârfuri. Primul vârf al perechii ordonate este coada muchiei, iar al doilea este capul; împreună, ele sunt extremităţile. Spunem că o muchie este o muchie de la coadă la cap.*

Termenii "cap" şi "coadă" provin din săgeţile folosite pentru desenarea digrafurilor. Ca şi în cazul grafurilor, asociem fiecărui vârf un punct în plan şi fiecărei muchii o curbă care uneşte extremităţile. Când desenăm un digraf, dăm curbei o direcţie de la coadă la cap.

Când un digraf modelează o relaţie, fiecare pereche ordonată este perechea (cap, coadă) pentru cel mult o muchie. În acest caz, ca şi în cazul grafurilor simple, ignorăm detaliul tehnic al unei funcţii care asociază extremităţile muchiilor şi considerăm pur şi simplu o muchie ca fiind o pereche ordonată de vârfuri.

**Definiţia 34** *Într-un digraf, o buclă este o muchie ale cărei extremităţi sunt egale. Muchiile multiple sunt muchii care au aceeaşi pereche ordonată de extremităţi. Un digraf este simplu dacă fiecare pereche ordonată este capul şi coada a cel mult unei muchii; la fiecare vârf poate exista o singură buclă.*

*Într-un digraf simplu, scriem $uv$ pentru o muchie cu coada $u$ şi capul $v$. Dacă există o muchie de la $u$ la $v$, atunci $v$ este succesorul lui $u$, iar $u$ este predecesorul lui $v$. Scriem $u \to v$ pentru "există o muchie de la $u$ la $v$".*

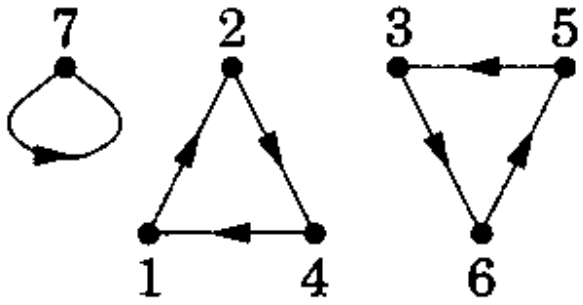
**Definiţia 35** *Un digraf este un drum dacă este un digraf simplu ale cărui vârfuri pot fi ordonate liniar astfel încât există o muchie cu coada $u$ şi capul $v$ dacă şi numai dacă $v$ urmează imediat după $u$ în ordonarea vârfurilor. Un ciclu este definit în mod similar folosind o ordonare a vârfurilor pe un cerc.*

**Exemplul 7.2** *Digrafuri funcţionale. Putem studia o funcţie $f : A \to A$ folosind digrafuri. Digraful funcţional al lui $f$ este digraful simplu cu mulţimea de vârfuri $A$ şi mulţimea de muchii*

$$\{(x, f(x)) : x \in A\}.$$

*Pentru fiecare $x$, singura muchie cu coada $x$ indică spre imaginea lui $x$ prin $f$.*

*Parcurgerea unui drum într-un digraf funcţional corespunde iterării funcţiei. Într-o permutare, fiecare element este imaginea exact a unui element, astfel încât digraful funcţional are un cap şi o coadă la fiecare vârf. Prin urmare, digraful funcţional al unei permutări este format din cicluri disjuncte. Mai jos este digraful funcţional pentru o permutare a lui* [7].




**Observaţia 7.1** *Folosim adesea aceleaşi denumiri pentru conceptele corespunzătoare din modelele de grafuri şi digrafuri. Mulţi autori înlocuiesc "vârf" şi "muchie" cu "nod" şi "arc" când discută despre digrafuri, dar aceasta ascunde analogiile la demonstraţii.*

*De asemenea, un graf $G$ poate fi modelat folosind un digraf $D$ în care fiecare muchie $uv \in E(G)$ este înlocuită cu $uv, vu \in E(D)$. În acest fel, rezultatele despre digrafuri pot fi aplicate grafurilor. Deoarece noţiunea de "muchie" în digrafuri extinde noţiunea de "muchie" în grafuri, folosirea aceluiaşi nume are sens.*

*Unii autori scriu "drum orientat" şi "ciclu orientat" pentru conceptele noastre de drum şi ciclu în digrafuri, dar distincţia nu este necesară; pentru versiunea "slabă" care nu urmează săgeţile, putem vorbi despre un drum sau un ciclu în graful obţinut prin ignorarea direcţiilor, pe care îl definim în continuare.*

**Definiţia 36** *Graful suport al unui digraf $D$ este graful $G$ obţinut tratând muchiile lui $D$ ca perechi neordonate. Mulţimea vârfurilor şi mulţimea muchiilor rămân aceleaşi, iar extremităţile unei muchii sunt aceleaşi în $G$ ca în $D$, dar în $G$ ele devin o pereche neordonată.*

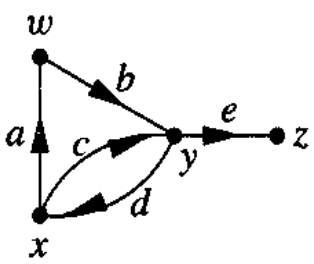



**Definiţia 37** *Definiţiile de subgraf, izomorfism, descompunere şi reuniune sunt aceleaşi pentru grafuri şi digrafuri. În matricea de adiacenţă $A(G)$ a unui digraf $G$, elementul din poziţia $i, j$ este numărul muchiilor de la $v_i$ la $v_j$. În matricea de incidenţă $M(G)$ a unui digraf fără bucle $G$, punem $m_{i,j} = +1$ dacă $v_i$ este coada lui $e_j$ şi $m_{i,j} = -1$ dacă $v_i$ este capul lui $e_j$.*

**Exemplul 7.3** *Graful suport al digrafului de mai jos este graful discutat în trecut, la grafuri neorientate.*

$$\begin{array}{c} \\ w \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w & x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$A(G)$




$G$

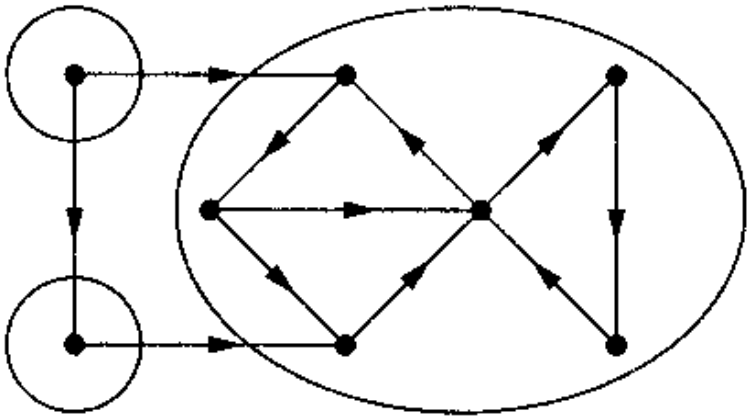
$$\begin{array}{c} \\ w \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$M(G)$

Pentru a defini digrafurile conexe, apar două opţiuni. Am putea cere doar ca graful suport să fie conex. Totuşi, aceasta nu surprinde sensul cel mai util al conexiunii pentru digrafuri.

**Definiţia 38** *Un digraf este slab conex dacă graful său suport este conex. Un digraf este tare conex, sau tare, dacă, pentru fiecare pereche ordonată $u, v$ de vârfuri, există un drum de la $u$ la $v$. Componentele tari ale unui digraf sunt subgrafurile sale tari maximale.*

**Exemplul 7.4** *Digraful cu două vârfuri care constă numai din muchia $xy$ are un drum $x, y$, dar nu are un drum $y, x$ şi nu este tare conex. Ca digraf, un drum cu $n$ vârfuri are $n$ componente tari (care sunt chiar vârfurile), dar un ciclu are una singură (care este întreg ciclul). În digraful de mai jos, cele trei subdigrafuri încercuite sunt componentele tari.*



**Definiţia 39** *Un nucleu într-un digraf $D$ este o mulţime $S \subseteq V(D)$ astfel încât $S$ nu induce muchii şi fiecare vârf din afara lui $S$ are un succesor în $S$.*

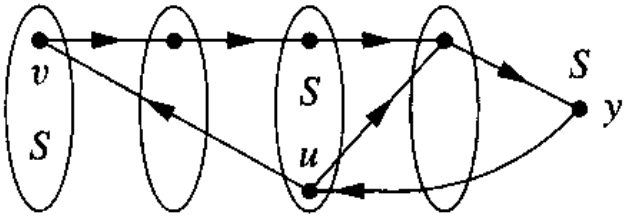
Următoarele afirmaţii au loc:

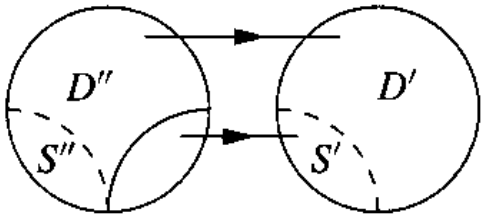
- Un digraf care este un ciclu impar nu are nucleu deoarece din fiecare nod pleacă un arc, dar interzicerea ciclurilor impare ca subdigrafuri conduce întotdeauna la un nucleu, aşa cum vom vedea în Teorema 8.
- Orice walk $u, v$ într-un digraf conţine un drum $u, v$, iar orice walk închis impar într-un digraf conţine un ciclu impar.
- Distanţa de la $x$ la $y$ este lungimea minimă a unui drum $x, y$.

**Teorema 8 (Richardson)** *Orice digraf care nu are cicluri impare are un nucleu.*

*Demonstraţie.* Fie $D$ un astfel de digraf, care nu are cicluri impare. Considerăm mai întâi cazul în care $D$ este tare conex (vezi figura din stânga de mai jos). Fie $y \in V(D)$ un vârf arbitrar şi fie $S$ mulţimea vârfurilor aflate la distanţă pară de $y$. Fiecare vârf aflat la distanţă impară de $y$ are un succesor în $S$ (fiind tare conex, există obligatoriu un drum de la $y$ la acel vârf, care nu va fi situat în $S$).

Dacă vârfurile lui $S$ nu sunt două câte două neadiacente, atunci există un arc $uv$ cu $u, v \in S$. Din definiţia lui $S$, există un drum $u, y$ de lungime **pară** $P$ şi un drum $v, y$ de lungime **pară** $P'$. Adăugând $uv$ la începutul lui $P'$ obţinem un walk $u, y$, de lungime **impară** $W$. Deoarece $D$ este tare conex, $D$ are un drum $y, u$, $Q$. Combinând $Q$ cu unul dintre $P$ sau $W$ obţinem o plimbare închisă impară în $D$. Acest lucru este imposibil, deoarece o plimbare închisă impară conţine un ciclu impar. Prin urmare, $S$ este un nucleu în $D$.




Pentru cazul general folosim inducţia după $n(D)$.

*Pasul de bază:* $n(D) = 1$. Singurul exemplu este un singur vârf fără buclă. Acest vârf este un nucleu prin el însuşi.

*Pasul inductiv:* $n(D) > 1$. Deoarece am demonstrat deja afirmaţia pentru digrafurile tari, putem presupune că $D$ nu este tare. Pentru o componentă tare $D'$ a lui $D$ nu există nicio muchie de la un vârf din $D'$ către un vârf care nu aparţine lui $D'$. Am arătat că $D'$ are un nucleu. Fie $S'$ un nucleu al lui $D'$.

Fie $D''$ subdigraful obţinut din $D$ prin ştergerea lui $D'$ şi a tuturor predecesorilor lui $S'$. Prin ipoteza de inducţie, $D''$ are un nucleu şi fie $S''$ un nucleu al lui $D''$. Atunci

$$S' \cup S''$$

este un nucleu al lui $D$. Deoarece $D''$ nu are niciun predecesor al lui $S'$, nu există nicio muchie în $S' \cup S''$. Fiecare vârf din $D'' - S''$ are un succesor în $S''$, iar toate celelalte vârfuri care nu aparţin lui $S' \cup S''$ au un succesor în $S'$.

## 7.1 Gradele vârfurilor

**Definiţia 40** *Fie $v$ un vârf într-un digraf. Gradul exterior $d^+(v)$ este numărul muchiilor cu coada $v$. Gradul interior $d^-(v)$ este numărul muchiilor cu capul $v$. Vecinătatea exterioară sau mulţimea succesorilor $N^+(v)$ este*

$$\{x \in V(G) : v \to x\}.$$

*Vecinătatea interioară sau mulţimea predecesorilor $N^-(v)$ este*

$$\{x \in V(G) : x \to v\}.$$

*Gradul interior minim şi maxim sunt $\delta^-(G)$ şi $\Delta^-(G)$; pentru gradul exterior folosim $\delta^+(G)$ şi $\Delta^+(G)$.*

Analogia formulei sumei gradelor pentru grafuri este imediată.

**Propoziţia 7.1** *Într-un digraf $G$,*

$$\sum_{v \in V(G)} d^+(v) = e(G) = \sum_{v \in V(G)} d^-(v).$$

*Demonstraţie.* Fiecare muchie are exact o coadă şi exact un cap.

Analogul secvenţei de grade pentru digrafuri este lista "perechilor de grade" $(d^+(v_i), d^-(v_i))$. Când este o listă de perechi realizabilă ca perechi de grade ale unui digraf? Ca şi în cazul grafurilor, acest lucru este uşor când permitem muchii multiple.

**Propoziţia 7.2** *O listă de perechi de numere întregi nenegative este realizabilă ca perechi de grade ale unui digraf dacă şi numai dacă suma primelor coordonate este egală cu suma celor de-a doua coordonate.*

*Demonstraţie.* Condiţia este *necesară* deoarece fiecare muchie are o coadă şi un cap, contribuind cu câte o unitate la fiecare sumă.

Pentru *suficienţă*, considerăm perechile

$$\{(d_i^+, d_i^-) : 1 \leq i \leq n\}$$

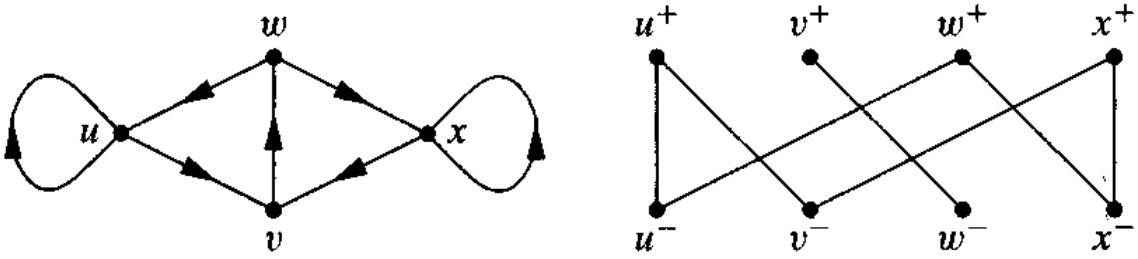
şi vârfurile $v_1, \ldots, v_n$. Fie

$$m = \sum_i d_i^+ = \sum_i d_i^-.$$

Considerăm $m$ puncte. Dăm punctelor etichete pozitive, dintre care $d_i^+$ au eticheta $i$. Dăm, de asemenea, punctelor etichete negative, dintre care $d_j^-$ au eticheta $-j$. Pentru fiecare punct cu etichetele $i$ şi $-j$, punem o muchie de la $v_i$ la $v_j$. Obţinem astfel un digraf cu $d^+(v_i) = d_i^+$ şi $d^-(v_i) = d_i^-$.

Întrebarea analogă pentru digrafurile simple este mai dificilă. Ea poate fi reformulată în termenii grafurilor bipartite printr-o transformare utilă în multe probleme despre digrafuri.

**Definiţia 41** *Desfacerea unui digraf $D$ este un graf bipartit $G$ ale cărui mulţimi de bipartiţie $V^+$ şi $V^-$ sunt copii ale lui $V(D)$. Pentru fiecare vârf $x \in V(D)$ există un vârf $x^+ \in V^+$ şi un vârf $x^- \in V^-$. Pentru fiecare muchie de la $u$ la $v$ în $D$, există în $G$ o muchie cu extremităţile $u^+$ şi $v^-$.*




**Observaţia 7.2**

- *Gradele vârfurilor din desfacerea lui $D$ sunt gradele interioare şi exterioare ale vârfurilor din $D$.*
- *Mai mult, un graf bipartit $G$ cu $|X| = |Y| = n$ poate fi transformat într-un digraf $D$ cu $n$ vârfuri punând o muchie $v_iv_j$ în $D$ pentru fiecare muchie $x_iy_j$ din $G$. Atunci $G$ este desfacerea lui $D$. Acesta este unul dintre motivele pentru care permitem bucle în digrafurile simple.*
- *Astfel, există un digraf simplu cu perechile de grade $\{(d_i^+, d_i^-) : 1 \leq i \leq n\}$ dacă şi numai dacă există un graf bipartit simplu $G$ în care gradele vârfurilor sunt $d_1^+, \ldots, d_n^+$ într-o mulţime de bipartiţie şi $d_1^-, \ldots, d_n^-$ în cealaltă mulţime de bipartiţie.*

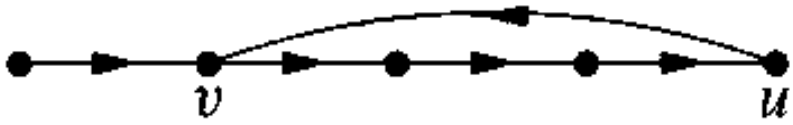
## Digrafuri euleriene

Definiţiile de walk, traseu, circuit şi relaţia de conexiune sunt aceleaşi în grafuri şi digrafuri atunci când listăm muchiile ca perechi ordonate de vârfuri. Într-un digraf, muchiile succesive trebuie să "urmeze săgeţile". În parcurgerea $v_0, e_1, \ldots, e_k, v_k$, muchia $e_i$ are coada $v_{i-1}$ şi capul $v_i$.

**Definiţia 42** *Un traseu eulerian într-un digraf (sau graf) este un traseu care conţine toate muchiile. Un circuit eulerian este un traseu închis care conţine toate muchiile. Un digraf este eulerian dacă are un circuit eulerian.*

**Lema 7.1** *Dacă $G$ este un digraf cu $\delta^+(G) \geq 1$, atunci $G$ conţine un ciclu. Aceeaşi concluzie este valabilă când $\delta^-(G) \geq 1$.*

*Demonstraţie.* Fie $P$ un drum maximal în $G$ şi fie $u$ ultimul vârf al lui $P$. Deoarece $P$ nu poate fi extins, fiecare succesor al lui $u$ trebuie să fie deja un vârf al lui $P$. Deoarece $\delta^+(G) \geq 1$, $u$ are un succesor $v$ pe $P$. Muchia $uv$ completează un ciclu împreună cu porţiunea lui $P$ de la $v$ la $u$.




Demonstraţia este încheiată.

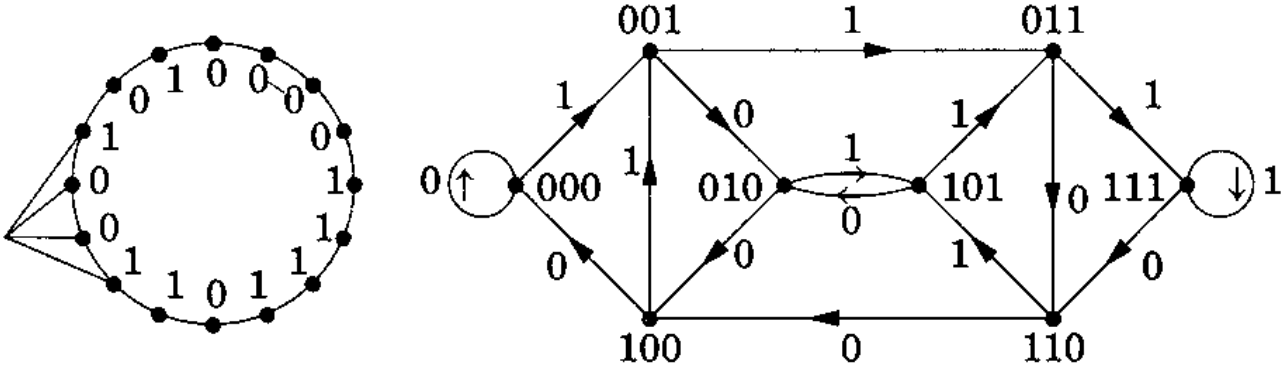
**Teorema 9** *Un digraf este eulerian dacă şi numai dacă $d^+(v) = d^-(v)$ pentru fiecare vârf $v$ şi graful suport are cel mult o componentă netrivială.*

**Observaţia 7.3** *Orice digraf eulerian fără vârfuri izolate este tare conex, deşi caracterizarea arată că este suficientă conexitatea slabă.*

**Exemplul 7.5** ***Aplicaţie. Cicluri de Bruijn.*** *Există $2^n$ şiruri binare de lungime $n$. Există oare o aşezare ciclică a $2^n$ cifre binare astfel încât cele $2^n$ şiruri de $n$ cifre consecutive să fie toate distincte? Pentru $n = 4$, funcţionează* $(0000 \mid 1111 \mid 0110 \mid 0101)$.

*Putem folosi o asemenea aşezare pentru a urmări poziţia unui tambur rotativ (Good [1946]). Tamburul are $2^n$ poziţii de rotaţie. O bandă în jurul circumferinţei este împărţită în $2^n$ porţiuni care pot fi codificate cu $0$ sau $1$. Senzorii citesc $n$ porţiuni consecutive. Dacă codificarea are proprietatea specificată mai sus, atunci poziţia tamburului este determinată de şirul citit de senzori.*

*Pentru a obţine o asemenea aşezare circulară, definim un digraf $D_n$ ale cărui vârfuri sunt $(n-1)$-tuplurile binare. Punem o muchie de la $a$ la $b$ dacă ultimele $n-2$ componente ale lui $a$ coincid cu primele $n-2$ componente ale lui $b$. Etichetăm muchia cu ultima componentă a lui $b$. Mai jos este prezentat $D_4$. În continuare demonstrăm că $D_n$ este eulerian şi arătăm cum un circuit eulerian conduce la aşezarea circulară dorită.*



**Teorema 10** *Digraful $D_n$ din aplicaţia privind ciclurile de de Bruijn este eulerian, iar etichetele muchiilor din orice circuit eulerian al lui $D_n$ formează o aşezare circulară în care toate cele $2^n$ şiruri consecutive de lungime $n$ sunt distincte.*

*Demonstraţie.*

- Fiecare vârf al lui $D_n$ are grad exterior egal cu $2$, deoarece putem adăuga fie $0$, fie $1$ la numele său pentru a obţine un vârf succesor.
- În mod similar, fiecare vârf are grad interior egal cu $2$, deoarece putem adăuga $0$ sau $1$ la începutul numelui atunci când parcurgem muchiile în sens invers.
- Digraful $D_n$ este tare conex: din orice vârf putem ajunge la vârful $b = (b_1, \ldots, b_{n-1})$ urmând succesiv muchiile etichetate $b_1, \ldots, b_{n-1}$. Prin urmare, $D_n$ este eulerian.
- Fie $C$ un circuit eulerian al lui $D_n$. Dacă sosim în vârful $a = (a_1, \ldots, a_{n-1})$, muchia prin care sosim are eticheta $a_{n-1}$. Deoarece, la trecerea la vârful următor, se elimină prima componentă şi se deplasează celelalte componente, etichetele precedente, privite înapoi, sunt $a_{n-2}, \ldots, a_1$. Dacă următoarea muchie are eticheta $a_n$, atunci cele mai recente $n$ etichete formează şirul $a_1, \ldots, a_n$.
- Cele $2^{n-1}$ vârfuri au etichete distincte, iar cele două muchii care ies din fiecare vârf au etichete distincte. Deoarece circuitul eulerian parcurge fiecare muchie exact o dată, rezultă că cele $2^n$ şiruri de lungime $n$ din aşezarea circulară obţinută sunt distincte

Demonstraţia Teoremei este, astfel, încheiată.

Digraful $D_n$ se numeşte graful de Bruijn de ordin $n$ pe un alfabet cu două simboluri. El este util şi în alte situaţii, deoarece are multe vârfuri şi puţine muchii (dublul numărului de vârfuri), dar orice vârf poate fi atins din oricare altul printr-un drum scurt. Mai precis, putem atinge fiecare vârf dorit în $n - 1$ paşi.

## 7.2 Orientări şii turnee

**Definiţia 43** *O orientare a unui graf $G$ este un digraf $D$ obţinut prin alegerea unei orientări ($x \to y$ sau $y \to x$) pentru fiecare muchie $xy \in E(G)$. Un graf orientat este o orientare a unui graf simplu. Un turneu este o orientare a unui graf complet.*

Un graf orientat este, în esenţă, acelaşi lucru cu un digraf simplu fără bucle. Atunci când muchiile unui graf reprezintă comparaţii între obiectele corespunzătoare vârfurilor, rezultatele comparaţiilor pot fi reprezentate prin orientarea $x \to y$ atunci când $x$ obţine un rezultat mai bun decât $y$.

Numărul grafurilor orientate cu vârfurile $v_1, \ldots, v_n$ este $3^{C_n^2}$, iar numărul turneelor este $2^{C_n^2}$.

**Definiţia 44** *Într-un digraf, un rege este un vârf din care orice alt vârf este accesibil printr-un drum de lungime cel mult $2$.*

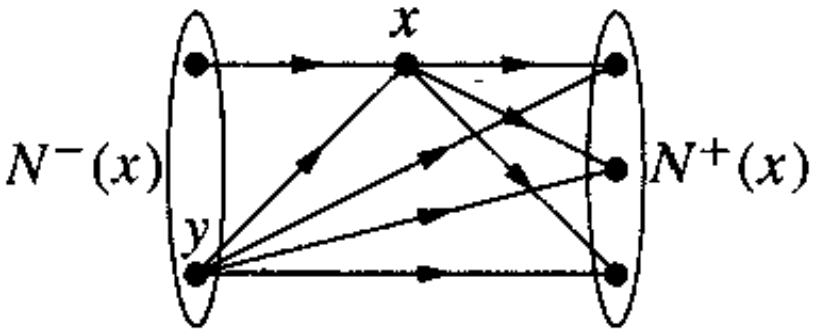
**Propoziţia 7.3** *Orice turneu are un rege. Mai precis, orice vârf de grad exterior maxim într-un turneu este rege.*

*Demonstraţie.* Fie $x$ un vârf al turneului $T$. Dacă $x$ nu este rege, există un vârf $y$ care nu este accesibil din $x$ printr-un drum de lungime cel mult $2$. Prin urmare, niciun succesor al lui $x$ nu este predecesor al lui $y$.

Deoarece $T$ este o orientare a unui graf complet, orice succesor al lui $x$ trebuie să fie, în acest caz, succesor al lui $y$. În plus, $y \to x$. Rezultă

$$d^+(y) > d^+(x).$$

Dacă $y$ nu este rege, repetăm argumentul şi obţinem un vârf cu grad exterior şi mai mare. Deoarece turneul are un număr finit de vârfuri, nu putem continua la nesfârşit cu grade exterioare strict crescătoare. Procedura se opreşte numai atunci când am găsit un rege. Prin urmare, orice vârf de grad exterior maxim este rege.




# Bibliografie


[1] D. West, *Introduction to Graph Theory. Solution manual*, Pearson Education (2001).

[2] D. West, *Introduction to Graph Theory*, Pearson Education (2002).

[3] Holton D.A. and J. Sheehan, *The Petersen Graph.*, Cambr. Univ. Press (1993).